Hilbert-Samuel-Koeffizienten graduierter Komponenten lokaler Kohomologiemoduln

Diplomarbeit

ausgeführt unter der Leitung von
Prof. Dr. M. Brodmann
am Institut für Mathematik der Universität Zürich

SS 2003

Fred Rohrer

Abstract

Let $R = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} R_n$ be a homogeneous Noetherian ring with one dimensional local base ring $(R_0, \mathfrak{m}_0)$. Let $\mathfrak{q}_0 \subseteq R_0$ be an $\mathfrak{m}_0$-primary ideal, let M be a finitely generated graded R-module and let $i \in \mathbb{N}_0$. Let $H^i_{R_+}(M)$ denote the i-th local cohomology module of M with respect to the irrelevant ideal R_+ of R. We show that the first Hilbert-Samuel coefficient $e_1(\mathfrak{q}_0, H^i_{R_+}(M)_n)$ of the n-th graded component of $H^i_{R_+}(M)$ with respect to $\mathfrak{q}_0$ is antipolynomial of degree $< i$ in n. In addition we prove that the postulation numbers of the components $H^i_{R_+}(M)_n$ with respect to $\mathfrak{q}_0$ have a common upper bound.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit Sätzen der graduierten lokalen Kohomologietheorie und kann als Fortsetzung oder Ergänzung zum Artikel *"Local cohomology over homogenous rings with one-dimensional local base ring"* von Brodmann-Fumasoli-Tajarod ([2]) betrachtet werden. Die hier bewiesenen Resultate werden in der Einleitung zum parallel zu dieser Arbeit entstandenen Artikel *"Hilbert-Samuel coefficients and postulation numbers of graded components of certain local cohomology modules"* ([3]) in einen grösseren Zusammenhang gestellt. Detailliertere Inhaltsbeschreibungen finden sich jeweils am Anfang eines Kapitels.
Für die benötigten Grundkenntnisse der lokalen Kohomologietheorie und der homologischen und kommutativen Algebra sei auf die Lehrbücher von Brodmann-Sharp ([4]) und Matsumura ([8]) verwiesen.

Kapitel 1

Die Regularität des assoziierten graduierten Moduls

In diesem ersten Kapitel wollen wir einige Strukturen definieren, welche uns später von Nutzen sein werden. Wir betrachten einen beliebigen Ring A und ein Ideal $\mathfrak{a}$ in A. Wir wollen daraus einen homogenen Ring konstruieren. Dazu definieren wir zuerst den Rees-Ring $\mathscr{R}(\mathfrak{a})$ von $\mathfrak{a}$ und dann den assoziierten graduierten Ring $\mathrm{Gr}(\mathfrak{a})$ von $\mathfrak{a}$. Diese beiden Ringe sind homogen wie gewünscht. Betrachten wir zusätzlich einen A-Modul T, so können wir analoge Konstruktionen durchführen und erhalten den Rees-Modul $\mathscr{R}(\mathfrak{a}, T)$ und den assoziierten graduierten Modul $\mathrm{Gr}(\mathfrak{a}, T)$; beide sind graduiert. Wir stellen anschliessend kurz einige einfache Eigenschaften dieser vier Strukturen zusammen.

In einem zweiten Abschnitt betrachten wir die Situation über einem eindimensionalen, Noetherschen lokalen Ring $(A, \mathfrak{m})$ und die oben erwähnten graduierten Strukturen bezüglich eines $\mathfrak{m}$-primären Ideals $\mathfrak{q}$. Unter diesen Voraussetzungen wollen wir obere Schranken für die Regularitäten von $\mathscr{R}(\mathfrak{q}, T)$ und $\mathrm{Gr}(\mathfrak{q}, T)$ bestimmen. Das wichtige an diesen Schranken wird sein, dass sie nicht vom Modul T, sondern nur vom Grundring A und vom Ideal $\mathfrak{q}$ abhängen. Das Bestimmen dieser Schranken haben wir der Übersichtlichkeit halber in mehrere Schritte aufgeteilt, zwischen denen wir des öfteren für die Beweise nötige Hilfssätze zitieren oder beweisen. Ein wesentlicher Teil des Beweises der Existenz dieser Schranken verwendet die Idealtransformation und die dadurch gegebene exakte Sequenz; dazu vergleiche man [4].

1.1 Rees-Moduln und assoziierte graduierte Moduln

Notationen 1.1
a) Mit einem Ring meinen wir immer einen kommutativen Ring mit Eins. Entsprechend sind Ringmorphismen immer unitär.
b) Mit einer Graduierung meinen wir immer eine $\mathbb{Z}$-Graduierung.
c) Ist A ein Ring, so bezeichnen wir mit $\mathscr{C}(A)$ die Kategorie der A-Moduln. Ist A graduiert, so bezeichnen wir mit ${}^*\mathscr{C}(A)$ die Kategorie der graduierten A-Moduln.

d) Sind A ein Ring und T ein A-Modul, so bezeichnen wir mit $\mathrm{ZD}_A(T)$ bzw. $\mathrm{NZD}_A(T)$ die Menge der Nullteiler bzw. Nichtnullteiler bezüglich T in A. Weiter bezeichnen wir mit $l_A(T)$ die Länge von T.
e) Sind $A = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0} A_n$ ein positiv graduierter Ring und $k \in \mathbb{N}_0$, so definieren wir das graduierte Ideal $A_{\geq k} := \bigoplus_{n\geq k} A_n$. Zusätzlich bezeichnen wir das irrelevante Ideal $A_{\geq 1}$ mit A_+.
f) Ist $\mathfrak{a}$ ein Ideal in einem Ring A, so bezeichnet $\mathrm{Var}(\mathfrak{a})$ die Varietät von $\mathfrak{a}$, d.h. die Menge aller Primideale von A, welche $\mathfrak{a}$ umfassen.
g) Suprema und Infima werden immer in $\mathbb{Z}\cup\{\pm\infty\}$ gebildet, und nach ihren Definitionen gelten dann $\sup(\emptyset) = -\infty$, $\inf(\emptyset) = \infty$.
h) Sind A ein Noetherscher Ring und $\mathfrak{q} \subseteq A$ ein Ideal, so bezeichnen wir mit

$$\Gamma_{\mathfrak{a}}(\bullet) : \mathscr{C}(A) \to \mathscr{C}(A)$$

den $\mathfrak{a}$-Torsionsfunktor und für $i \in \mathbb{N}_0$ mit

$$H^i_{\mathfrak{a}}(\bullet) : \mathscr{C}(A) \to \mathscr{C}(A)$$

den i-ten lokalen Kohomologiefunktor. Sind zusätzlich A und $\mathfrak{a}$ graduiert, so bezeichnen wir den graduierten $\mathfrak{a}$-Torsionsfunktor bzw. den i-ten graduierten lokalen Kohomologiefunktor wiederum mit $\Gamma_{\mathfrak{a}}(\bullet) : {}^*\mathscr{C}(A) \to {}^*\mathscr{C}(A)$ bzw. mit $H^i_{\mathfrak{a}}(\bullet) : {}^*\mathscr{C}(A) \to {}^*\mathscr{C}(A)$. i) Für einen graduierten Modul $T = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} T_n$ über einem Noetherschen graduierten Ring A definieren wir die folgenden Begriffe wie in [4]:

$$\mathrm{beg}(T) := \inf\{n \in \mathbb{Z} | T_n \neq 0\}$$

heisst der **Anfang von** T,

$$\mathrm{end}(T) := \sup\{n \in \mathbb{Z} | T_n \neq 0\}$$

heisst das **Ende von** T, und

$$\mathrm{reg}(T) := \sup\{\mathrm{end}(H^i_{A_+}(T)) + i | i \in \mathbb{N}_0\}$$

heisst die **(Castelnuovo-Mumford-) Regularität von** T.
j) Sind A ein Ring und $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal, so bezeichnen wir mit $D_{\mathfrak{a}}(\bullet) : \mathscr{C}(A) \to \mathscr{C}(A)$ den Funktor der Idealtransformation bezüglich $\mathfrak{a}$.

Definition 1.2
Seien A ein Ring und $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal. Dann definieren wir

$$\mathscr{R}(\mathfrak{a}) := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0} \mathfrak{a}^n$$

als additive Gruppe.

Bemerkungen 1.3
Leicht überprüft man die folgenden Aussagen:
a) Elemente von $\mathscr{R}(\mathfrak{a})$ sind Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in A so, dass $a_n \in \mathfrak{a}^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und dass $\{n \in \mathbb{N}_0 | a_n \neq 0\}$ endlich ist.
b) Wir definieren auf $\mathscr{R}(\mathfrak{a})$ eine Multiplikation durch

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \cdot (b_n)_{n\in\mathbb{N}_0} := (\sum_{j+k=n} a_j b_k)_{n\in\mathbb{N}_0}.$$

Versehen mit dieser Multiplikation und der natürlichen Addition ist $\mathscr{R}(\mathfrak{a})$ ein Ring.
c) $(\mathfrak{a}^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist eine positive Graduierung auf $\mathscr{R}(\mathfrak{a})$.
d) A kann mit $\mathscr{R}(\mathfrak{a})_0$ identifiziert werden. Dann ist $\mathscr{R}(\mathfrak{a})$ eine homogene A-Algebra, das heisst $\mathscr{R}(\mathfrak{a}) = A[\mathscr{R}(\mathfrak{a})_1]$, und für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ist $\mathscr{R}(\mathfrak{a})_n$ ein A-Modul.

Definition 1.4
Der graduierte Ring $\mathscr{R}(\mathfrak{a}) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0} \mathfrak{a}^n$ heisst der **Rees-Ring von $\mathfrak{a}$**.

Definition 1.5
Seien A ein Ring und $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal. Dann definieren wir

$$\operatorname{Gr}(\mathfrak{a}) := \mathscr{R}(\mathfrak{a})/\mathfrak{a}\mathscr{R}(\mathfrak{a})$$

als Quotientenring.

Bemerkungen 1.6
Einfaches Nachrechnen liefert die folgenden Aussagen:
a) $(\mathfrak{a}^n/\mathfrak{a}^{n+1})_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist die Quotientengraduierung auf $\operatorname{Gr}(\mathfrak{a})$.
b) $\operatorname{Gr}(\mathfrak{a})$ ist eine homogene A-Algebra und somit auch eine homogene $\mathscr{R}(\mathfrak{a})$-Algebra.
c) Addition und Multiplikation in $\operatorname{Gr}(\mathfrak{a})$ sind durch die Quotientenoperationen wie folgt gegeben:

$$(a_n + \mathfrak{a}^{n+1})_{n\in\mathbb{N}_0} + (b_n + \mathfrak{a}^{n+1})_{n\in\mathbb{N}_0} = (a_n + b_n + \mathfrak{a}^{n+1})_{n\in\mathbb{N}_0},$$
$$(a_n + \mathfrak{a}^{n+1})_{n\in\mathbb{N}_0} \cdot (b_n + \mathfrak{a}^{n+1})_{n\in\mathbb{N}_0} = (\sum_{j+k=n} a_j b_k + \mathfrak{a}^{n+1})_{n\in\mathbb{N}_0}.$$

Definition 1.7
Der graduierte Ring $\operatorname{Gr}(\mathfrak{a}) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0} \mathfrak{a}^n/\mathfrak{a}^{n+1}$ heisst der **assoziierte graduierte Ring von $\mathfrak{a}$**.

Definition 1.8
Seien A ein Ring, $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal und T ein A-Modul.

$$\mathscr{R}(\mathfrak{a}, T) := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0} \mathfrak{a}^n T$$

(als A-Modul) heisst der **Rees-Modul von $\mathfrak{a}$ für T**.

Bemerkungen 1.9
Leicht prüft man nach, dass folgende Aussagen gelten:
a) Elemente von $\mathscr{R}(\mathfrak{a}, T)$ sind Folgen $(t_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in T so, dass $t_n \in \mathfrak{a}^n T$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und dass $\{n \in \mathbb{N}_0 | t_n \neq 0\}$ endlich ist.
b) Vermöge der Skalarenmultiplikation

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \cdot (t_n)_{n\in\mathbb{N}_0} := (\sum_{j+k=n} a_j t_k)_{n\in\mathbb{N}_0}$$

ist $\mathscr{R}(\mathfrak{a}, T)$ ein $\mathscr{R}(\mathfrak{a})$-Modul.
c) $(\mathfrak{a}^n T)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist eine Graduierung auf $\mathscr{R}(\mathfrak{a}, T)$ als $\mathscr{R}(\mathfrak{a})$-Modul.
d) T kann mit dem A-Modul $\mathscr{R}(\mathfrak{a}, T)_0$ identifiziert werden.
e) Im folgenden wird $\mathscr{R}(\mathfrak{a}, T)$ immer als graduierter $\mathscr{R}(\mathfrak{a})$-Modul mit obiger Graduierung aufgefasst.

Definition 1.10
Seien A ein Ring, $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal und T ein A-Modul. Dann definieren wir

$$\mathrm{Gr}(\mathfrak{a}, T) := \mathscr{R}(\mathfrak{a}, T)/\mathfrak{a}\mathscr{R}(\mathfrak{a}, T)$$

als $\mathscr{R}(\mathfrak{a})$-Modul.

Bemerkungen 1.11
Wiederum rechnet man die Richtigkeit folgender Aussagen leicht nach:
a) $(\mathfrak{a}^n T/\mathfrak{a}^{n+1} T)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist die Restklassengraduierung auf $\mathrm{Gr}(\mathfrak{a}, T)$.
b) Vermöge der Skalarenmultiplikation

$$(a_n + \mathfrak{a}^{n+1})_{n\in\mathbb{N}_0} \cdot (t_n + \mathfrak{a}^{n+1} T)_{n\in\mathbb{N}_0} := (\sum_{j+k=n} a_j t_k + \mathfrak{a}^{n+1} T)_{n\in\mathbb{N}_0}$$

ist $\mathrm{Gr}(\mathfrak{a}, T)$ ein $\mathrm{Gr}(\mathfrak{a})$-Modul.
c) Die Graduierung $(\mathfrak{a}^n T/\mathfrak{a}^{n+1} T)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist eine Graduierung auf $\mathrm{Gr}(\mathfrak{a}, T)$ als $\mathrm{Gr}(\mathfrak{a})$-Modul.
d) Im folgenden wird $\mathrm{Gr}(\mathfrak{a}, T)$ immer als $\mathrm{Gr}(\mathfrak{a})$-Modul mit obiger Graduierung aufgefasst.

Definition 1.12
$\mathscr{R}(\mathfrak{a}, T) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0} \mathfrak{a}^n T/\mathfrak{a}^{n+1} T$ heisst der **assoziierte graduierte Modul von $\mathfrak{a}$ für** T.

Bemerkungen 1.13
Seien A ein Noetherscher Ring, $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal und T ein endlich erzeugter A-Modul. Dann sieht man leicht, dass folgende Aussagen gelten:
a) $\mathscr{R}(\mathfrak{a})$ und $\mathrm{Gr}(\mathfrak{a})$ sind Noethersche Ringe.
b) $\mathscr{R}(\mathfrak{a}, T)$ ist ein endlich erzeugter $\mathscr{R}(\mathfrak{a})$-Modul.
c) $\mathrm{Gr}(\mathfrak{a}, T)$ ist ein endlich erzeugter $\mathrm{Gr}(\mathfrak{a})$-Modul.

Satz 1.14
Seien A ein Noetherscher Ring, $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq A$ Ideale mit $\mathfrak{a} \subseteq \sqrt{\mathfrak{b}}$ und T ein endlich erzeugter A-Modul. Aus $\Gamma_{\mathfrak{a}}(T) = 0$ folgt dann $\Gamma_{\mathscr{R}(\mathfrak{b})_+}(\mathscr{R}(\mathfrak{b}, T)) = 0$.

Beweis. Wir nehmen an, es existierte ein

$$\tau = (t_0, t_1, ...) \in \Gamma_{\mathscr{R}(\mathfrak{b})_+}(\mathscr{R}(\mathfrak{b}, T)) \setminus 0.$$

Sei $l := \min\{i \in \mathbb{N}_0 | t_i \neq 0\}$. Dann existierte ein $k \in \mathbb{N}_0$ so, dass $\mathscr{R}(\mathfrak{b})_+^k \tau = 0$. Da $\mathscr{R}(\mathfrak{b})$ homogen ist, gilt $\mathscr{R}(\mathfrak{b})_+^k = \mathscr{R}(\mathfrak{b})_{\geq k}$, und somit wäre $\mathscr{R}(\mathfrak{b})_{\geq k}\tau = 0$. Für jedes

$$\alpha = (0, ..., 0, a_k, a_{k+1}, ...) \in \mathscr{R}(\mathfrak{b})_{\geq k}$$

gälte also

$$\alpha\tau = (0, ..., 0, a_k t_l, a_k t_{l+1} + a_{k+1} t_l, ...) = 0.$$

Insbesondere gälte $a_k t_l = 0$, und zwar für jedes $a_k \in \mathfrak{b}^k$. Wegen $t_l \neq 0$ folgte jetzt $\mathfrak{b}^k \subseteq ZD_A(T)$, und dies implizierte $0 \neq \Gamma_{\mathfrak{b}^k}(T)$. Wegen $\mathfrak{a} \subseteq \sqrt{\mathfrak{b}}$ und weil T endlich erzeugt ist, gilt $\Gamma_{\mathfrak{b}^k}(T) \subseteq \Gamma_{\mathfrak{a}}(T)$, was ein Widerspruch zu $\Gamma_{\mathfrak{a}}(T) = 0$ wäre. □

1.2 Abschätzung der Regularitäten von $\mathscr{R}(\mathfrak{q}, T)$ und $\mathrm{Gr}(\mathfrak{q}, T)$

Lemma 1.15
Seien $B = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} B_n$ ein Noetherscher homogener Ring, $(B_0, \mathfrak{m}_0)$ lokal, $B_0/\mathfrak{m}_0$ unendlich, $\mathfrak{a} \subseteq B$ ein graduiertes Ideal und $C := B/\mathfrak{a}$ versehen mit der Restklassengraduierung. Weiter sei $U \subseteq C$ ein graduiertes Ideal so, dass für $\bar{C} := C/U$ gilt $\Gamma_{C_+}(\bar{C}) = 0$. Schliesslich sei G ein endlich erzeugter A-Modul mit $\Gamma_{B_+}(G) = 0$, und $\bar{\cdot} : B \longrightarrow C$ bezeichne den Quotientenmorphismus.
Dann existiert ein Element $x \in B_1 \cap NZD_B(G)$ so, dass $\bar{x} \in C_1 \cap NZD_C(\bar{C})$.

Beweis. $\bar{C}$ ist ein endlich erzeugter C-Modul. G ist nach Voraussetzung endlich erzeugt. Somit sind die beiden Mengen $\mathrm{Ass}_C(\bar{C})$ und $\mathrm{Ass}_B(G)$ endlich. Seien $\mathrm{Ass}_C(\bar{C}) = \{\mathfrak{p}_1, ..., \mathfrak{p}_N\}$ und $\mathrm{Ass}_B(G) = \{\mathfrak{q}_1, ..., \mathfrak{q}_M\}$. Es gibt bekanntlich eine Bijektion

$$\Phi : \mathrm{Spec}(C) \longrightarrow \mathrm{Var}(\mathfrak{a}),$$

wobei die Umkehrabbildung durch die Quotientenbildung gegeben ist.
Sei $\mathbb{I} := \{\Phi(\mathfrak{p}_1), ..., \Phi(\mathfrak{p}_N), \mathfrak{q}_1, ..., \mathfrak{q}_M\} \subseteq \mathrm{Spec}(B)$. Wegen $\Gamma_{C_+}(\bar{C}) = 0$ gilt

$$C_+ \nsubseteq \mathrm{ZD}_C(\bar{C}) = \bigcup \mathrm{Ass}_C(\bar{C}),$$

also $C_+ \nsubseteq \mathfrak{p}_i$ für $i \in \{1, ..., N\}$. Daraus folgt wegen $C_+ = B_+/(\mathfrak{a} \cap B_+)$, dass auch gilt $B_+ \nsubseteq \Phi(\mathfrak{p}_i)$ für alle $i \in \{1, ..., N\}$. Wegen $\Gamma_{B_+}(G) = 0$ gilt für $i \in \{1, ..., M\}$ auch $B_+ \nsubseteq \mathfrak{q}_i$.

Sei jetzt $\mathfrak{p} \in \mathbb{I}$. Dann gilt also $B_+ \nsubseteq \mathfrak{p}$. Wäre $\mathfrak{p} \cap B_1 = B_1$, so gälte $B_1 \subseteq \mathfrak{p}$ und weil B homogen ist auch $B_+ \subseteq \mathfrak{p}$. Dies wäre ein Widerspruch, und somit ist $\mathfrak{p} \cap B_1 \subsetneqq B_1$. Es ist dann

$$(\mathfrak{p} \cap B_1 + \mathfrak{m}_0 B_1)/\mathfrak{m}_0 B_1 \subsetneqq B_1/\mathfrak{m}_0 B_1$$

ein echter $B_0/\mathfrak{m}_0$-Untervektorraum, denn sonst wäre $\mathfrak{p} \cap B_1 + \mathfrak{m}_0 B_1 = B_1$, nach dem Lemma von Nakayama also $\mathfrak{p} \cap B_1 = B_1$, was aber nicht der Fall ist. Weil $B_0/\mathfrak{m}_0$ unendlich ist, ist die Vereinigung endlich vieler echter $B_0/\mathfrak{m}_0$-Untervektorräume von $B_1/\mathfrak{m}_0 B_1$ wieder ein echter $B_0/\mathfrak{m}_0$-Untervektorraum, d.h.

$$\bigcup_{\mathfrak{p} \in \mathbb{I}} ((\mathfrak{p} \cap B_1 + \mathfrak{m}_0 B_1)/\mathfrak{m}_0 B_1) \subsetneqq B_1/\mathfrak{m}_0 B_1.$$

Deshalb existiert ein Element $x \in B_1 \setminus \bigcup \mathbb{I}$. Für dieses gilt

$$x \notin \bigcup \mathrm{Ass}_B(G) = \mathrm{ZD}_B(G),$$

also $x \in \mathrm{NZD}_B(G)$. Weiter gilt $x \notin \bigcup_{i=1}^N \Phi(\mathfrak{p}_i)$ und für $i \in \{1, ..., N\}$ somit $x \notin \Phi(\mathfrak{p}_i)$, also auch $\bar{x} \notin \mathfrak{p}_i$. Daraus folgt

$$\bar{x} \notin \bigcup \mathrm{Ass}_C(\bar{C}) = \mathrm{ZD}_C(\bar{C}),$$

also $\bar{x} \in \mathrm{NZD}_C(\bar{C})$ und zugleich – weil $\bar{\cdot}$ graduiert ist – $\bar{x} \in C_1$. □

Satz 1.16
Seien S ein Noetherscher Ring und G ein endlich erzeugter S-Modul. Dann gelten:
a) $\mathrm{Supp}_S(G) = \mathrm{Var}((0 :_S G))$.
b) $\mathrm{Ass}_S(G) \subseteq \mathrm{Supp}_S(G)$.
c) Ist $\mathrm{Ass}_S(G)$ *einelementig, so gilt* $\mathrm{Ass}_S(G) = \{\{a \in S | G \xrightarrow{a\cdot} G \textit{ ist nilpotent}\}\}$.
d) Sind $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(S)$ *und* $\mathrm{Var}((0 :_S G)) = \{\mathfrak{p}\}$, *so existiert ein* $n \in \mathbb{N}_0$ *so, dass* $\mathfrak{p}^n G = 0$.

Beweis. a) [5, Satz 4.14]; b) [5, Folgerung 4.7, Satz 4.15]; c) [5, Satz 4.19, Zusatz 4.20].
d) Aus a) folgt, dass $\mathrm{Supp}_S(G) = \{\mathfrak{p}\}$. Da die Varietät des Annullators von G nicht leer ist, gilt $G \neq 0$. Zusammen mit b) folgt jetzt $\emptyset \neq \mathrm{Ass}_S(G) \subseteq \mathrm{Supp}_S(G) = \{\mathfrak{p}\}$, also $\mathrm{Ass}_S(G) = \{\mathfrak{p}\}$. Da S Noethersch ist, folgt aus c) die Behauptung. □

Nach diesen Vorbereitungen beginnen wir den angekündigten Beweis der Existenz von oberen Schranken für die Regularitäten von Rees-Modul und assoziiertem graduiertem Modul.

Im folgenden seien

- $(A, \mathfrak{m})$ ein Noetherscher lokaler Ring,
- $\mathfrak{q} \subseteq A$ ein $\mathfrak{m}$-primäres Ideal und
- $K := A/\mathfrak{m}$.

Notation 1.17
a) Elemente aus $\mathscr{R}(\mathfrak{q})$ bezeichnen wir im allgemeinen mit kleinen griechischen Buchstaben. Eine Ausnahme bilden Elemente, die auf folgende Art erhalten werden: Ist $x \in \mathfrak{q}$, so sei

$$x^* := (\delta_n^1 x)_{n\in\mathbb{N}_0} \in \mathscr{R}(\mathfrak{q}),$$

wobei δ_j^i das Kroneckerdelta bezeichne.
b) Wir bezeichnen mit

$$\mathscr{F}(\mathfrak{q}) := \mathscr{R}(\mathfrak{q})/\mathfrak{m}\mathscr{R}(\mathfrak{q})$$

den sogenannten Faserkegelring von $\mathfrak{q}$ und versehen ihn mit der Quotientengraduierung. Weiter sei

$$\overline{\mathscr{F}}(\mathfrak{q}) := \mathscr{F}(\mathfrak{q})/\Gamma_{\mathscr{F}(\mathfrak{q})_+}(\mathscr{F}(\mathfrak{q}))$$

ebenfalls versehen mit der Quotientengraduierung.
c) Die Restklasse eines Elements $\alpha \in \mathscr{R}(\mathfrak{q})$ in $\mathscr{F}(\mathfrak{q})$ bezeichnen wir mit $\bar{\alpha}$. Ohne dass es zu Unklarheiten führen wird, bezeichnen wir Restklassen in $\overline{\mathscr{F}}(\mathfrak{q})$ ebenfalls mit $\bar{\alpha}$.

Lemma 1.18
a) $\mathscr{F}(\mathfrak{q}) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0} \mathfrak{q}^n/\mathfrak{m}\mathfrak{q}^n$ *ist eine homogene* K*-Algebra von endlichem Typ.*
b) $\overline{\mathscr{F}}(\mathfrak{q})$ *ist eine homogene* K*-Algebra.*

Beweis. a) $\mathscr{R}(\mathfrak{q})$ ist eine A-Algebra, also ist $\mathscr{F}(\mathfrak{q})$ als Quotientenring von $\mathscr{R}(\mathfrak{q})$ auch eine A-Algebra. Somit gibt es einen Ringmorphismus $f : A \longrightarrow \mathscr{F}(\mathfrak{q})$, und es gilt $\mathfrak{m} \subseteq \mathrm{Ker}(f)$. Deshalb gibt es einen Ringmorphismus $\tilde{f} : K \longrightarrow \mathscr{F}(\mathfrak{q})$. Also ist $\mathscr{F}(\mathfrak{q})$ eine K-Algebra. Offensichtlich hat die Quotientengraduierung auf $\mathscr{F}(\mathfrak{q})$ genau die Form $(\mathfrak{q}^n/\mathfrak{m}\mathfrak{q}^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.
$\mathscr{R}(\mathfrak{q})$ besitzt ein Erzeugendensystem über A in $\mathfrak{q}$, also insbesondere ein endliches. Die Restklassen dieser Erzeuger in $\mathscr{F}(\mathfrak{q})$ liegen in $\mathscr{F}(\mathfrak{q})_1$ und erzeugen $\mathscr{F}(\mathfrak{q})$ über K. Daraus folgt die Behauptung.
b) Vermöge des Quotientenmorphismus und weil $\mathscr{F}(\mathfrak{q})$ nach Aussage a) eine K-Algebra ist, ist $\overline{\mathscr{F}}(\mathfrak{q})$ eine K-Algebra. $\overline{\mathscr{F}}(\mathfrak{q})$ kann über K erzeugt werden durch Restklassen von Erzeugern von $\mathscr{F}(\mathfrak{q})$ in $\mathscr{F}(\mathfrak{q})_1$. Quotientenmorphismen sind graduiert, und deswegen sind diese Erzeuger von $\overline{\mathscr{F}}(\mathfrak{q})$ als Restklassen von Elementen vom Grad 1 wieder vom Grad 1. Somit ist $\overline{\mathscr{F}}(\mathfrak{q}) = \bigoplus\limits_{n\in\mathbb{N}_0} \overline{\mathscr{F}}(\mathfrak{q})_n$ eine homogene K-Algebra. □

Satz 1.19
a) $\dim(\mathrm{Gr}(\mathfrak{q})) = \dim(A)$*.*
b) $\dim(\mathscr{F}(\mathfrak{q})) \leq \dim(A)$*.*

Beweis. a) [7, Theorem 4.4.6].
b) Nach dem zweiten Isomorphiesatz gilt

$$\mathscr{F}(\mathfrak{q}) = \mathscr{R}(\mathfrak{q})/\mathfrak{m}\mathscr{R}(\mathfrak{q}) \cong (\mathscr{R}(\mathfrak{q})/\mathfrak{q}\mathscr{R}(\mathfrak{q}))/(\mathfrak{m}\mathscr{R}(\mathfrak{q})/\mathfrak{q}\mathscr{R}(\mathfrak{q})) = \mathrm{Gr}(\mathfrak{q})/(\mathfrak{m}\mathscr{R}(\mathfrak{q})/\mathfrak{q}\mathscr{R}(\mathfrak{q})).$$

Also ist $\mathscr{F}(\mathfrak{q})$ ein Quotient von $\mathrm{Gr}(\mathfrak{q})$, und somit gilt $\dim(\mathscr{F}(\mathfrak{q})) \leq \dim(\mathrm{Gr}(\mathfrak{q}))$. Mit a) folgt jetzt die Behauptung. □

Lemma 1.20
Sei $\bar{n_0} \in \mathbb{N}_0$ *mit* $\bar{n_0} > \mathrm{reg}(\mathscr{F}(\mathfrak{q}))$. *Für alle* $n \geq \bar{n_0}$ *ist dann der Quotientenmorphismus* $\mathscr{F}(\mathfrak{q})_n \longrightarrow \overline{\mathscr{F}}(\mathfrak{q})_n$ *ein Isomorphismus in* $\mathscr{C}(K)$.

Beweis. Nach Definition der Regularität gilt

$$\mathrm{end}(\Gamma_{\mathscr{F}(\mathfrak{q})_+}(\mathscr{F}(\mathfrak{q}))) = \mathrm{end}(H^0_{\mathscr{F}(\mathfrak{q})_+}(\mathscr{F}(\mathfrak{q})))$$

$$\leq \sup\{\mathrm{end}(H^i_{\mathscr{F}(\mathfrak{q})_+}(\mathscr{F}(\mathfrak{q}))) + i | i \in \mathbb{N}_0\} = \mathrm{reg}(\mathscr{F}(\mathfrak{q})).$$

Also gilt $\bar{n_0} > \mathrm{end}(\Gamma_{\mathscr{F}(\mathfrak{q})_+}(\mathscr{F}(\mathfrak{q})))$. Sei $n \geq \bar{n_0}$. Dann gilt $\Gamma_{\mathscr{F}(\mathfrak{q})_+}(\mathscr{F}(\mathfrak{q}))_n = 0$ und somit

$$\overline{\mathscr{F}}(\mathfrak{q})_n = (\mathscr{F}(\mathfrak{q})/\Gamma_{\mathscr{F}(\mathfrak{q})_+}(\mathscr{F}(\mathfrak{q})))_n \cong \mathscr{F}(\mathfrak{q})_n/\Gamma_{\mathscr{F}(\mathfrak{q})_+}(\mathscr{F}(\mathfrak{q}))_n = \mathscr{F}(\mathfrak{q})_n/0 \cong \mathscr{F}(\mathfrak{q})_n.$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Lemma 1.21
Sei $\bar{n_0} \in \mathbb{N}_0$ *mit* $\bar{n_0} > \mathrm{reg}(\mathscr{F}(\mathfrak{q}))$. *Weiter sei* $\eta : \overline{\mathscr{F}}(\mathfrak{q}) \longrightarrow D_{\mathscr{F}(\mathfrak{q})_+}(\overline{\mathscr{F}}(\mathfrak{q}))$ *der kanonische Morphismus, und für* $n \in \mathbb{N}_0$ *sei* $\eta_n : \overline{\mathscr{F}}(\mathfrak{q})_n \longrightarrow D_{\mathscr{F}(\mathfrak{q})_+}(\overline{\mathscr{F}}(\mathfrak{q}))_n$ *der* n*-te homogene Teil von* η. *Für* $n \geq \bar{n_0} - 1$ *ist dann* $\eta_n : \overline{\mathscr{F}}(\mathfrak{q})_n \longrightarrow D_{\mathscr{F}(\mathfrak{q})_+}(\overline{\mathscr{F}}(\mathfrak{q}))_n$ *ein Isomorphismus in* $\mathscr{C}(K)$.

Beweis. $\overline{\mathscr{F}}(\mathfrak{q})_n$ und $D_{\mathscr{F}(\mathfrak{q})_+}(\overline{\mathscr{F}}(\mathfrak{q}))_n$ sind $\mathscr{F}(\mathfrak{q})_0$-Moduln für alle $n \in \mathbb{N}_0$, also auch K-Vektorräume, denn $\mathscr{F}(\mathfrak{q})_0 \cong K$. η_n ist ein K-Vektorraummorphismus.
Die Idealtransformation liefert folgende exakte Sequenz in ${}^*\mathscr{C}(\mathscr{F}(\mathfrak{q}))$:

$$0 \longrightarrow \Gamma_{\mathscr{F}(\mathfrak{q})_+}(\overline{\mathscr{F}}(\mathfrak{q})) \longrightarrow \overline{\mathscr{F}}(\mathfrak{q}) \xrightarrow{\eta} D_{\mathscr{F}(\mathfrak{q})_+}(\overline{\mathscr{F}}(\mathfrak{q})) \longrightarrow H^1_{\mathscr{F}(\mathfrak{q})_+}(\overline{\mathscr{F}}(\mathfrak{q})) \longrightarrow 0.$$

Wegen $\Gamma_{\mathscr{F}(\mathfrak{q})_+}(\overline{\mathscr{F}}(\mathfrak{q})) = 0$ und $H^1_{\mathscr{F}(\mathfrak{q})_+}(\overline{\mathscr{F}}(\mathfrak{q})) \cong H^1_{\mathscr{F}(\mathfrak{q})_+}(\mathscr{F}(\mathfrak{q}))$ besteht also folgende exakte Sequenz in ${}^*\mathscr{C}(\mathscr{F}(\mathfrak{q}))$:

$$0 \longrightarrow \overline{\mathscr{F}}(\mathfrak{q}) \xrightarrow{\eta} D_{\mathscr{F}(\mathfrak{q})_+}(\overline{\mathscr{F}}(\mathfrak{q})) \longrightarrow H^1_{\mathscr{F}(\mathfrak{q})_+}(\mathscr{F}(\mathfrak{q})) \longrightarrow 0.$$

Somit besteht für $n \in \mathbb{N}_0$ folgende exakte Sequenz in $\mathscr{C}(K)$:

$$\mathbb{S}_n : 0 \longrightarrow \overline{\mathscr{F}}(\mathfrak{q})_n \xrightarrow{\eta_n} D_{\mathscr{F}(\mathfrak{q})_+}(\overline{\mathscr{F}}(\mathfrak{q}))_n \longrightarrow H^1_{\mathscr{F}(\mathfrak{q})_+}(\mathscr{F}(\mathfrak{q}))_n \longrightarrow 0.$$

Weiter gilt

$$\mathrm{end}(H^1_{\mathscr{F}(\mathfrak{q})_+}(\mathscr{F}(\mathfrak{q}))) < \mathrm{end}(H^1_{\mathscr{F}(\mathfrak{q})_+}(\mathscr{F}(\mathfrak{q}))) + 1$$

$$\leq \sup\{\mathrm{end}(H^i_{\mathscr{F}(\mathfrak{q})_+}(\mathscr{F}(\mathfrak{q}))) + i | i \in \mathbb{N}_0\} = \mathrm{reg}(\mathscr{F}(\mathfrak{q})).$$

Daraus folgt, dass für $n \geq \bar{n_0} - 1$ gilt $n > \mathrm{end}(H^1_{\mathscr{F}(\mathfrak{q})_+}(\mathscr{F}(\mathfrak{q})))$, also $H^1_{\mathscr{F}(\mathfrak{q})_+}(\mathscr{F}(\mathfrak{q}))_n = 0$.
Also ist für $n \geq \bar{n_0} - 1$ die Sequenz

$$\mathbb{S}_n : 0 \longrightarrow \overline{\mathscr{F}}(\mathfrak{q})_n \xrightarrow{\eta_n} D_{\mathscr{F}(\mathfrak{q})_+}(\overline{\mathscr{F}}(\mathfrak{q}))_n \longrightarrow 0$$

exakt, woraus die Behauptung folgt. □

Zusätzlich zu den bisherigen Voraussetzungen seien jetzt

- $\dim(A) = 1$,
- $K = A/\mathfrak{m}$ unendlich und
- $\bar{n_0} \in \mathbb{N}_0$ mit $\bar{n_0} > \operatorname{reg}(\mathscr{F}(\mathfrak{q}))$.

Lemma 1.22
Sei T ein endlich erzeugter A-Modul mit $\Gamma_{\mathfrak{m}}(T) = 0$. Dann existiert ein Element $\alpha \in \mathscr{R}(\mathfrak{q})_1 \cap \mathrm{NZD}_{\mathscr{R}(\mathfrak{q})}(\mathscr{R}(\mathfrak{q}, T))$ so, dass $\bar{\alpha} \in \mathscr{F}(\mathfrak{q})_1 \cap \mathrm{NZD}_{\mathscr{F}}(\mathfrak{q})(\overline{\mathscr{F}}(\mathfrak{q}))$ und dass für $n \geq \bar{n_0}$ der Multiplikationsmorphismus $\mathscr{F}(\mathfrak{q})_n \xrightarrow{\bar{\alpha}\cdot} \mathscr{F}(\mathfrak{q})_{n+1}$ ein Isomorphismus in $\mathscr{C}(K)$ ist.

Beweis. Wegen $\Gamma_{\mathfrak{m}}(T) = 0$ folgt aus Satz 1.14 (mit $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}$ und $\mathfrak{b} = \mathfrak{q}$), dass

$$\Gamma_{\mathscr{R}(\mathfrak{q})_+}(\mathscr{R}(\mathfrak{q}, T)) = 0.$$

Die Existenz eines Elements

$$\alpha \in \mathscr{R}(\mathfrak{q})_1 \cap \mathrm{NZD}_{\mathscr{R}(\mathfrak{q})}(\mathscr{R}(\mathfrak{q}, T))$$

mit

$$\bar{\alpha} \in \mathscr{F}(\mathfrak{q})_1 \cap \mathrm{NZD}_{\mathscr{F}}(\mathfrak{q})(\overline{\mathscr{F}}(\mathfrak{q}))$$

folgt aus Lemma 1.15 (mit $B = \mathscr{R}(\mathfrak{q}), C = \mathscr{F}(\mathfrak{q}), U = \Gamma_{\mathscr{F}(\mathfrak{q})_+}(\mathscr{F}(\mathfrak{q}))$ und $G = \mathscr{R}(\mathfrak{q}, T)$). Wegen $\bar{\alpha} \in \mathrm{NZD}_{\mathscr{F}}(\mathfrak{q})(\overline{\mathscr{F}}(\mathfrak{q}))$ besteht folgende exakte Sequenz in ${}^*\mathscr{C}(\mathscr{F}(\mathfrak{q}))$:

$$0 \longrightarrow \overline{\mathscr{F}}(\mathfrak{q}) \xrightarrow{\bar{\alpha}\cdot} \overline{\mathscr{F}}(\mathfrak{q})(1) \longrightarrow \overline{\mathscr{F}}(\mathfrak{q})/\bar{\alpha}\overline{\mathscr{F}}(\mathfrak{q})(1) \longrightarrow 0,$$

und es gilt wegen Satz 1.19

$$\dim(\overline{\mathscr{F}}(\mathfrak{q})/\bar{\alpha}\overline{\mathscr{F}}(\mathfrak{q})) = \dim(\overline{\mathscr{F}}(\mathfrak{q})) - 1 < \dim(\mathscr{F}(\mathfrak{q})) \leq \dim(A) = 1,$$

also $\dim(\overline{\mathscr{F}}(\mathfrak{q})/\bar{\alpha}\overline{\mathscr{F}}(\mathfrak{q})) = 0$. $\mathscr{F}(\mathfrak{q})_+$ ist das graduierte Maximalideal von $\mathscr{F}(\mathfrak{q})$, also ein *Primoberideal von $(0 :_{\mathscr{F}(\mathfrak{q})} \overline{\mathscr{F}}(\mathfrak{q})/\bar{\alpha}\overline{\mathscr{F}}(\mathfrak{q}))$ und wegen $\dim(\overline{\mathscr{F}}(\mathfrak{q})/\bar{\alpha}\overline{\mathscr{F}}(\mathfrak{q})) = 0$ das einzige. Nach Satz 1.16 d) (mit $A = \mathscr{F}(\mathfrak{q})$, $T = \overline{\mathscr{F}}(\mathfrak{q})/\bar{\alpha}\overline{\mathscr{F}}(\mathfrak{q})$ und $\mathfrak{p} = \mathscr{F}(\mathfrak{q})_+$) ist $\overline{\mathscr{F}}(\mathfrak{q})/\bar{\alpha}\overline{\mathscr{F}}(\mathfrak{q})$ ein $\mathscr{F}(\mathfrak{q})_+$-Torsionsmodul. Deshalb gilt $D_{\mathscr{F}(\mathfrak{q})_+}(\overline{\mathscr{F}}(\mathfrak{q})/\bar{\alpha}\overline{\mathscr{F}}(\mathfrak{q})) = 0$. Wegen der Linksexaktheit und der Linearität der Idealtransformation besteht folgende exakte Sequenz in ${}^*\mathscr{C}(\mathscr{F}(\mathfrak{q}))$:

$$0 \longrightarrow D_{\mathscr{F}(\mathfrak{q})_+}(\overline{\mathscr{F}}(\mathfrak{q})) \xrightarrow{\bar{\alpha}\cdot} D_{\mathscr{F}(\mathfrak{q})_+}(\overline{\mathscr{F}}(\mathfrak{q})(1)) \longrightarrow D_{\mathscr{F}(\mathfrak{q})_+}(\overline{\mathscr{F}}(\mathfrak{q})/\bar{\alpha}\overline{\mathscr{F}}(\mathfrak{q})(1)),$$

nach dem oben gezeigten und weil die Idealtransformation mit Linksverschiebungen vertauscht also die Sequenz

$$0 \longrightarrow D_{\mathscr{F}(\mathfrak{q})_+}(\overline{\mathscr{F}}(\mathfrak{q})) \xrightarrow{\bar{\alpha}\cdot} D_{\mathscr{F}(\mathfrak{q})_+}(\overline{\mathscr{F}}(\mathfrak{q})(1)) \longrightarrow 0,$$

und somit ist $D_{\mathscr{F}(\mathfrak{q})_+}(\overline{\mathscr{F}}(\mathfrak{q})) \xrightarrow{\bar{\alpha}\cdot} D_{\mathscr{F}(\mathfrak{q})_+}(\overline{\mathscr{F}}(\mathfrak{q})(1))$ ein Isomorphismus in ${}^*\mathscr{C}(\mathscr{F}(\mathfrak{q}))$. Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist darum $D_{\mathscr{F}(\mathfrak{q})_+}(\overline{\mathscr{F}}(\mathfrak{q}))_n \xrightarrow{\bar{\alpha}\cdot} D_{\mathscr{F}(\mathfrak{q})_+}(\overline{\mathscr{F}}(\mathfrak{q}))_{n+1}$ ein Isomorphismus in $\mathscr{C}(K)$. Für $n \geq \bar{n_0} - 1$ ist also nach Lemma 1.21 $\overline{\mathscr{F}}(\mathfrak{q})_n \xrightarrow{\bar{\alpha}\cdot} \overline{\mathscr{F}}(\mathfrak{q})_{n+1}$ ein Isomorphismus in $\mathscr{C}(K)$, und somit gilt nach Lemma 1.20 die Behauptung. $\square$

Lemma 1.23
Sei T ein endlich erzeugter A-Modul mit $\Gamma_{\mathfrak{m}}(T) = 0$. Dann existiert ein Element $x \in \mathfrak{q} \setminus \mathfrak{m}\mathfrak{q}$ so, dass für jedes $n \geq \bar{n_0}$ die Multiplikationsabbildung $\mathfrak{q}^n \xrightarrow{x\cdot} \mathfrak{q}^{n+1}$ surjektiv ist und dass gilt $x^* \in \mathrm{NZD}_{\mathscr{R}(\mathfrak{q})}(\mathscr{R}(\mathfrak{q}, T))$.

Beweis. Wir wählen ein $\alpha \in \mathscr{R}(\mathfrak{q})_1 \cap \mathrm{NZD}_{\mathscr{R}(\mathfrak{q})}(\mathscr{R}(\mathfrak{q}, T))$ wie in Lemma 1.22. Dann ist

$$0 \neq \bar{\alpha} \in \mathscr{F}(\mathfrak{q})_1 \cap \mathrm{NZD}_{\mathscr{F}(\mathfrak{q})}(\overline{\mathscr{F}}(\mathfrak{q})).$$

Wegen $\alpha \in \mathscr{R}(\mathfrak{q})_1$ gibt es ein $x \in \mathfrak{q}$ mit $x^* = \alpha$. Wegen $\bar{\alpha} \neq 0$ gilt $\alpha \notin \mathfrak{m}\mathscr{R}(\mathfrak{q})$, also $x \in \mathfrak{q} \setminus \mathfrak{m}\mathfrak{q}$.
Nach Lemma 1.22 besteht für $n \geq \bar{n_0}$ folgendes Diagramm in $\mathscr{C}(A)$:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{q}^n \arrow[r, "x\cdot"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathfrak{q}^{n+1} \arrow[d] \\
\mathscr{F}(\mathfrak{q})_n = \mathfrak{q}^n/\mathfrak{m}\mathfrak{q}^{n+1} \arrow[r, "\bar{\alpha}\cdot", "\cong"'] & \mathscr{F}(\mathfrak{q})_{n+1} = \mathfrak{q}^{n+1}/\mathfrak{m}\mathfrak{q}^{n+2}
\end{tikzcd}$$

Weil das Diagramm kommutiert und weil der Morphismus

$$\mathfrak{q}^n \longrightarrow \mathscr{F}(\mathfrak{q})_n \xrightarrow{\cong} \mathscr{F}(\mathfrak{q})_{n+1}$$

surjektiv ist, gilt $x\mathfrak{q}^n + \mathfrak{m}\mathfrak{q}^{n+2} = \mathfrak{q}^{n+1} + \mathfrak{m}\mathfrak{q}^{n+2}$. Daraus folgt $x\mathfrak{q}^n + \mathfrak{m}\mathfrak{q}^{n+2} = \mathfrak{q}^{n+1}$, und nach dem Lemma von Nakayama gilt jetzt $x\mathfrak{q}^n = \mathfrak{q}^{n+1}$, d.h. die Abbildung $\mathfrak{q}^n \xrightarrow{x\cdot} \mathfrak{q}^{n+1}$ ist surjektiv. Somit gilt die Behauptung. □

Satz 1.24
Sei $x \in \mathfrak{q}$ so, dass für jedes $n \geq \bar{n_0}$ die Multiplikationsabbildung $\mathfrak{q}^n \xrightarrow{x\cdot} \mathfrak{q}^{n+1}$ surjektiv ist. Dann gilt

$$\sqrt{\mathscr{R}(\mathfrak{q})_+} = \sqrt{x^*\mathscr{R}(\mathfrak{q})}.$$

Beweis. "$\subseteq$": Sei $\alpha \in \sqrt{\mathscr{R}(\mathfrak{q})_+}$. Dann existiert ein $k \in \mathbb{N}_0$ mit $\alpha^k \in \mathscr{R}(\mathfrak{q})_+$. Sei $\alpha^k = (0, a_1, a_2, ...)$ mit $a_i \in \mathfrak{q}^i$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Dann ist $\alpha^{k(\bar{n_0}+1)} = (0, ..., 0, \tilde{a}_{\bar{n_0}+1}, \tilde{a}_{\bar{n_0}+2}, ...)$ mit $\tilde{a}_i \in \mathfrak{q}^i$ für alle $i > \bar{n_0}$. Für $i > \bar{n_0}$ gilt nach Voraussetzung aber $\mathfrak{q}^i = x\mathfrak{q}^{i-1}$, und folglich liegt die i-te homogene Komponente von $\alpha^{k(\bar{n_0}+1)}$ in $x\mathfrak{q}^{i-1}$. Die Elemente von $\mathscr{R}(\mathfrak{q})$ mit dieser Eigenschaft sind aber genau die Elemente des Hauptideals $x^*\mathscr{R}(\mathfrak{q})$. Also gilt $\alpha^{k(\bar{n_0}+1)} \in x^*\mathscr{R}(\mathfrak{q})$, und es folgt $\alpha \in \sqrt{x^*\mathscr{R}(\mathfrak{q})}$.
"$\supseteq$": Wegen $x^* \in \mathscr{R}(\mathfrak{q})_1$ ist $x^*\mathscr{R}(\mathfrak{q}) \subseteq \mathscr{R}(\mathfrak{q})_+$, und daraus folgt die Behauptung. □

Satz 1.25
Seien S ein Noetherscher Ring, $\mathfrak{a} \subseteq S$ ein Ideal und T ein S-Modul mit $\mathfrak{a}T \neq T$. Es gelten dann:
a) $H^i_{\mathfrak{a}}(T) = 0$ für alle $i > \mathrm{ara}(\mathfrak{a})$.
b) $H^i_{\mathfrak{a}}(T) = 0$ für alle $i < \mathrm{grade}_T(\mathfrak{a})$.

Beweis. a) [4, Corollary 3.3.3]; b) [4, Theorem 6.2.7]. □

Satz 1.26
Für jeden $\mathscr{R}(\mathfrak{q})$-Modul T und für $i > 1$ gilt $H^i_{\mathscr{R}(\mathfrak{q})_+}(T) = 0$.

Beweis. Nach Lemma 1.23 und Satz 1.24 ist $\mathscr{R}(\mathfrak{q})_+$ radikalgleich zu einem Hauptideal. Also gilt nach Definition des arithmetischen Ranges $\operatorname{ara}(\mathscr{R}(\mathfrak{q})_+) \leq 1$. Jetzt folgt die Behauptung aus Satz 1.25. □

Lemma 1.27
Seien $S = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} S_n$ ein graduierter Ring, $G = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} G_n$ ein graduierter S-Modul, $n_0 \in \mathbb{Z}$ und $x \in S_1$ so, dass für alle $n \geq n_0$ die Multiplikationsabbildung $G_n \xrightarrow{x\cdot} G_{n+1}$ ein Isomorphismus ist. Dann ist für alle $n \geq n_0$ die n-te Komponente der Lokalisierungsabbildung $\eta_n : G_n \longrightarrow (G_x)_n$ ein Isomorphismus.

Beweis. Für $n \in \mathbb{Z}$ ist $\eta_n : G_n \longrightarrow (G_x)_n$ gegeben durch $g \longmapsto \frac{g}{1}$. Wir wählen ein $n \geq n_0$. Sei $g \in G_n$ mit $\eta_n(g) = \frac{g}{1} = 0$. Dies bedeutet, dass ein $k \in \mathbb{N}_0$ existiert mit $x^k g = 0$. Da die Multiplikation mit x aber ein Isomorphismus, also insbesondere injektiv ist, muss $g = 0$ gelten. Somit ist η_n injektiv.
Sei nun $f \in (G_x)_n$. Dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}_0$ und ein $g \in G_{n+m}$ so, dass $f = \frac{g}{x^m}$. Weil die Multiplikation mit x ein Isomorphismus, also insbesondere surjektiv ist, existiert ein $g' \in G_n$ so, dass $x^m g' = g$. Somit gilt

$$f = \frac{g}{x^m} = \frac{x^m g'}{x^m} = \frac{g'}{1} = \eta_n(g').$$

Also ist η_n surjektiv, und folglich gilt die Behauptung. □

Satz 1.28
Sei S ein Noetherscher Ring.
a) Seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq S$ Ideale mit $\sqrt{\mathfrak{a}} = \sqrt{\mathfrak{b}}$. Dann sind die Funktoren $D_{\mathfrak{a}}(\bullet)$ und $D_{\mathfrak{b}}(\bullet)$ natürlich äquivalent.
b) Sei $a \in S$. Dann sind die Funktoren $D_{(a)}(\bullet)$ und $(\bullet)_a$ natürlich äquivalent.

Beweis. a) [4, Exercise 2.2.20] , b) [4, Theorem 2.2.16]. □

Jetzt haben wir genügend Informationen, um die uns interessierenden Regularitäten abzuschätzen. Allerdings zeigen wir für $\mathscr{R}(\mathfrak{q}, T)$ im nächsten Satz ein stärkeres Resultat, als es die schlussendliche Abschätzung (Korollar 1.30) sein wird.

Satz 1.29
Sei T ein endlich erzeugter A-Modul mit $\Gamma_{\mathfrak{m}}(T) = 0$. Dann gelten:
a) $H^0_{\mathscr{R}(\mathfrak{q})_+}(\mathscr{R}(\mathfrak{q}, T)) = 0$.
b) $\operatorname{end}(H^1_{\mathscr{R}(\mathfrak{q})_+}(\mathscr{R}(\mathfrak{q}, T))) < \bar{n_0}$.

Beweis. Die Aussage a) folgt direkt aus Satz 1.14 (mit $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}$ und $\mathfrak{b} = \mathfrak{q}$). Um die Aussage b) zu beweisen, wählen wir ein nach Lemma 1.23 existierendes $x \in \mathfrak{q}$ so, dass $x^* \in \operatorname{NZD}_{\mathscr{R}(\mathfrak{q})}(\mathscr{R}(\mathfrak{q}, T))$ und dass für $n \geq \bar{n_0}$ die Multiplikationsabbildung $\mathfrak{q}^n \xrightarrow{x\cdot} \mathfrak{q}^{n+1}$

surjektiv ist. Für jedes $n \geq \bar{n_0}$ liefern die Idealtransformation und Aussage a) folgende exakte Sequenz in $\mathscr{C}(A)$:

$$0 \longrightarrow \mathscr{R}(\mathfrak{q},T)_n \longrightarrow D_{\mathscr{R}(\mathfrak{q})_+}(\mathscr{R}(\mathfrak{q},T))_n \longrightarrow H^1_{\mathscr{R}(\mathfrak{q})_+}(\mathscr{R}(\mathfrak{q},T))_n \longrightarrow 0.$$

Nach der Wahl von x gilt für jedes $n \geq \bar{n_0}$ die Gleichheit $x\mathfrak{q}^n = \mathfrak{q}^{n+1}$, also auch $x\mathfrak{q}^nT = \mathfrak{q}^{n+1}T$, was dasselbe bedeutet wie $x^*\mathscr{R}(\mathfrak{q},T)_n = \mathscr{R}(\mathfrak{q},T)_{n+1}$. Also ist die Multiplikationsabbildung $\mathscr{R}(\mathfrak{q},T)_n \xrightarrow{x^*\cdot} \mathscr{R}(\mathfrak{q},T)_{n+1}$ in Komponenten vom Grad grösser oder gleich $\bar{n_0}$ surjektiv. Da x^* aber auch ein Nichtnullteiler bezüglich $\mathscr{R}(\mathfrak{q},T)$ ist, ist die Multiplikation mit x^* in diesen Komponenten ein Isomorphismus. Nach Lemma 1.27 sind somit für $n \geq \bar{n_0}$ die A-Moduln $(\mathscr{R}(\mathfrak{q},T)_{x^*})_n$ und $\mathscr{R}(\mathfrak{q},T)_n$ isomorph. Weiter sind nach den Sätzen 1.24 und 1.28 die Funktoren $D_{\mathscr{R}(\mathfrak{q})_+}(\bullet)$ und $\bullet_{x^*}$ natürlich äquivalent. Also gilt

$$\mathscr{R}(\mathfrak{q},T)_n \cong (\mathscr{R}(\mathfrak{q},T)_{x^*})_n \cong (D_{\mathscr{R}(\mathfrak{q})_+}(\mathscr{R}(\mathfrak{q},T)))_n,$$

und aus der Exaktheit obiger Sequenz folgt die Behauptung b). □

Korollar 1.30 (Regularität des Rees-Moduls)
Für jeden endlich erzeugten A-Modul T mit $\Gamma_{\mathfrak{m}}(T) = 0$ gilt $\operatorname{reg}(\mathscr{R}(\mathfrak{q},T)) \leq \bar{n_0}$.

Beweis. Aus Satz 1.26 und Satz 1.29 folgt sofort die Behauptung. □

Satz 1.31 (Regularität des assoziierten graduierten Moduls)
Für jeden endlich erzeugten A-Modul T mit $\Gamma_{\mathfrak{m}}(T) = 0$ gilt $\operatorname{reg}(\operatorname{Gr}(\mathfrak{q},T)) \leq \bar{n_0}$.

Beweis. Es bestehen folgende exakten Sequenzen in ${}^*\mathscr{C}(\mathscr{R}(\mathfrak{q}))$:

$$\mathbb{S} : 0 \longrightarrow \mathfrak{q}\mathscr{R}(\mathfrak{q},T) \longrightarrow \mathscr{R}(\mathfrak{q},T)(1) \longrightarrow [T]_{-1} \longrightarrow 0,$$

$$\mathbb{V} : 0 \longrightarrow \mathfrak{q}\mathscr{R}(\mathfrak{q},T) \longrightarrow \mathscr{R}(\mathfrak{q},T) \longrightarrow \operatorname{Gr}(\mathfrak{q},T) \longrightarrow 0.$$

Hierbei bezeichnet $[T]_{-1}$ den graduierten $\mathscr{R}(\mathfrak{q})$-Modul, dessen einzige von 0 verschiedene Komponente vom Grad -1 und gleich T ist.
Die lange Kohomologiesequenz zu $\mathbb{S}$ liefert nach Satz 1.26 folgende exakte Sequenz in ${}^*\mathscr{C}(\mathscr{R}(\mathfrak{q}))$:

$$0 \longrightarrow H^0_{\mathscr{R}(\mathfrak{q})_+}(\mathfrak{q}\mathscr{R}(\mathfrak{q},T)) \longrightarrow H^0_{\mathscr{R}(\mathfrak{q})_+}(\mathscr{R}(\mathfrak{q},T)(1)) \longrightarrow H^0_{\mathscr{R}(\mathfrak{q})_+}([T]_{-1})$$

$$\longrightarrow H^1_{\mathscr{R}(\mathfrak{q})_+}(\mathfrak{q}\mathscr{R}(\mathfrak{q},T)) \longrightarrow H^1_{\mathscr{R}(\mathfrak{q})_+}(\mathscr{R}(\mathfrak{q},T)(1)) \longrightarrow H^1_{\mathscr{R}(\mathfrak{q})_+}([T]_{-1}) \longrightarrow 0.$$

Nach Satz 1.29 verschwindet $H^0_{\mathscr{R}(\mathfrak{q})_+}(\mathscr{R}(\mathfrak{q},T)(1))$.
Elemente in $\mathscr{R}(\mathfrak{q})_+$ haben einen Grad grösser als 0, d.h. Produkte von Elementen aus $\mathscr{R}(\mathfrak{q})_+$ mit Elementen aus $[T]_{-1}$ haben einen Grad grösser als -1, liegen also in einer graduierten Komponente von $[T]_{-1}$ vom Grad grösser als -1 und sind somit gleich 0. Also ist $[T]_{-1}$ ein $\mathscr{R}(\mathfrak{q})_+$-Torsionsmodul. Dies bedeutet, dass $H^0_{\mathscr{R}(\mathfrak{q})_+}([T]_{-1}) = [T]_{-1}$ und $H^1_{\mathscr{R}(\mathfrak{q})_+}([T]_{-1}) = 0$. Weil zusätzlich die lokale Kohomologie mit Linksverschiebungen vertauscht und $\mathbb{S}$ graduiert ist, besteht für $n \in \mathbb{Z}$ folgende exakte Sequenz in $\mathscr{C}(A)$:

$$0 \longrightarrow ([T]_{-1})_n \longrightarrow H^1_{\mathscr{R}(\mathfrak{q})_+}(\mathfrak{q}\mathscr{R}(\mathfrak{q},T))_n \longrightarrow H^1_{\mathscr{R}(\mathfrak{q})_+}(\mathscr{R}(\mathfrak{q},T))_{n+1} \longrightarrow 0.$$

Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $([T]_{-1})_n = 0$, und deshalb besteht folgender Isomorphismus in $\mathscr{C}(A)$:

$$H^1_{\mathscr{R}(\mathfrak{q})_+}(\mathfrak{q}\mathscr{R}(\mathfrak{q},T))_n \xrightarrow{\cong} H^1_{\mathscr{R}(\mathfrak{q})_+}(\mathscr{R}(\mathfrak{q},T))_{n+1}.$$

Sei $n \geq \bar{n_0}$. Dann ist nach Satz 1.29 auch $n > \operatorname{end}(H^1_{\mathscr{R}(\mathfrak{q})_+}(\mathscr{R}(\mathfrak{q},T)))$, also wegen obigem Isomorphismus

$$H^1_{\mathscr{R}(\mathfrak{q})_+}(\mathfrak{q}\mathscr{R}(\mathfrak{q},T))_{n-1} \cong H^1_{\mathscr{R}(\mathfrak{q})_+}(\mathscr{R}(\mathfrak{q},T))_n = 0.$$

Die lange Kohomologiesequenz zu $\mathbb{V}$ liefert zusammen mit Satz 1.29 für $m \in \mathbb{N}_0$ folgende exakte Sequenz in $\mathscr{C}(A)$:

$$0 \longrightarrow H^0_{\mathscr{R}(\mathfrak{q})_+}(\operatorname{Gr}(\mathfrak{q},T))_m \longrightarrow H^1_{\mathscr{R}(\mathfrak{q})_+}(\mathfrak{q}\mathscr{R}(\mathfrak{q},T))_m$$

$$\longrightarrow H^1_{\mathscr{R}(\mathfrak{q})_+}(\mathscr{R}(\mathfrak{q},T))_m \longrightarrow H^1_{\mathscr{R}(\mathfrak{q})_+}(\operatorname{Gr}(\mathfrak{q},T))_m \longrightarrow 0.$$

Mit dem soeben gezeigten folgt, dass $H^0_{\mathscr{R}(\mathfrak{q})_+}(\operatorname{Gr}(\mathfrak{q},T))_n = 0$ für alle $n \geq \bar{n_0} - 1$ und $H^1_{\mathscr{R}(\mathfrak{q})_+}(\operatorname{Gr}(\mathfrak{q},T))_n = 0$ für alle $n \geq \bar{n_0}$. Daraus folgt mit Satz 1.26

$$\operatorname{reg}(\operatorname{Gr}(\mathfrak{q},T)) = \sup\{\operatorname{end}(H^0_{\mathscr{R}(\mathfrak{q})_+}(\operatorname{Gr}(\mathfrak{q},T))), \operatorname{end}(H^1_{\mathscr{R}(\mathfrak{q})_+}(\operatorname{Gr}(\mathfrak{q},T))) + 1\}$$

$$\leq \sup\{\bar{n_0} - 2, \bar{n_0}\} = \bar{n_0}.$$

□

Bemerkung 1.32
Unter Verwendung der Theorie der Reduktionen von Idealen (vgl. [4, Kapitel 18]) kann man für einige der Resultate dieses Kapitels kürzere als die hier gegebenen Beweise erhalten (vgl. [3]).

Kapitel 2

Hilbert-Samuel-Polynome

In diesem Kapitel betrachten wir zuerst einen Artinschen graduierten Modul H über einem Noetherschen homogenen Ring R, dessen Grundring R_0 lokal ist und einen unendlichen Restekörper besitzt. Insbesondere interessieren wir uns für die Funktion

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}_0, n \mapsto l_{R_0}(H_n).$$

Wir werden zeigen, dass unter obigen Voraussetzungen diese Funktion antipolynomial ist, d.h. dass es ein Polynom $P(X) \in \mathbb{Q}[X]$ gibt so, dass für genügend kleine Argumente n gilt $l_{R_0}(H_n) = P(n)$. Für den Beweis dieser Tatsache verwenden wir als wesentlichen Bestandteil die Theorie der Sekundärzerlegungen, wobei wir uns an [4] und [6] halten.

Anschliessend definieren wir die Hilbert-Samuel-Funktion, welche die oben erwähnte Funktion auf den nichtgraduierten Fall derart verallgemeinert, dass für einen Modul über einem Noetherschen lokalen Ring $(A, \mathfrak{m})$ anstelle des Moduls selbst ein Untermodul des assoziierten graduierten Moduls bezüglich eines $\mathfrak{m}$-primären Ideals betrachtet wird. Wir führen das Hilbert-Samuel-Polynom und die Hilbertkoeffizienten ein, verweisen für die dazu notwendigen Beweise aber schon jetzt auf [4] und [7].

2.1 Artinsche graduierte Moduln

Es gelten weiterhin die Notationen aus 1.1.

Lemma 2.1
Seien A ein Ring, $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal, M ein A-Modul, $U := \mathfrak{a}M$ und $V \subseteq M$ ein A-Untermodul mit $U \cap V = 0$. Dann besteht folgende exakte Sequenz in $\mathscr{C}(A)$:

$$0 \longrightarrow V \longrightarrow M/U \longrightarrow (M/V)/\mathfrak{a}(M/V) \longrightarrow 0.$$

Beweis. Wir betrachten die Abbildungen

$$f : V \longrightarrow M/U, x \longmapsto x + U,$$

$$g : M/U \longrightarrow (M/V)/\mathfrak{a}(M/V), x + U \longmapsto (x + V) + \mathfrak{a}(M/V).$$

Dabei handelt es sich offensichtlich um A-Modulmorphismen. Wegen $U \cap V = 0$ gilt

$$\operatorname{Ker}(f) = \{x \in V | x \in U\} = U \cap V = 0.$$

Also ist f injektiv.
Jetzt betrachten wir die beiden Quotientenmorphismen

$$h_1 : M \longrightarrow (M/V)/\mathfrak{a}(M/V), x \longmapsto (x+V) + \mathfrak{a}(M/V),$$

$$h_2 : M \longrightarrow M/U, x \longmapsto x + U.$$

h_1 und h_2 sind surjektiv und es gilt: $g \circ h_2 = h_1$. Somit ist $g \circ h_2$, also auch g, surjektiv. Sei $x + U \in \operatorname{Im}(f)$. Dann ist $x \in V$ und somit $g(x) = 0$, also $x \in \operatorname{Ker}(g)$. Sei jetzt $x + U \in \operatorname{Ker}(g)$. Dies bedeutet, dass $x + V \in \mathfrak{a}(M/V)$. Somit gilt $x \in U$ oder $x \in V$, also $x + U \in \operatorname{Im}(f)$. Insgesamt ist jetzt $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Ker}(g)$ gezeigt, und es besteht die gewünschte exakte Sequenz. □

Lemma 2.2
Sei $F : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent:
i) Es gibt ein $P(X) \in \mathbb{Q}[X]$ so, dass für $n \gg 0$ gilt: $P(n) = F(n)$.
ii) Es gibt ein $Q(X) \in \mathbb{Q}[X]$ so, dass für $n \gg 0$ gilt: $Q(n) = F(n+1) - F(n)$.

Beweis. [5, Lemma 5.12]. □

Lemma 2.3
Sei $F : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent:
i) Es gibt ein $P(X) \in \mathbb{Q}[X]$ so, dass für $n \ll 0$ gilt: $P(n) = F(n)$.
ii) Es gibt ein $Q(X) \in \mathbb{Q}[X]$ so, dass für $n \ll 0$ gilt: $Q(n) = F(n) - F(n+1)$.

Beweis. "i) $\Rightarrow$ ii)": Gilt Aussage i), so gilt für $n \ll 0$ auch

$$P(n) - P(n+1) = F(n) - F(n+1).$$

Sei $Q(X) := P(X) - P(X+1)$. Offensichtlich ist $Q(X) \in \mathbb{Q}[X]$ und es gilt Aussage ii).
"ii) $\Rightarrow$ i)": Seien

$$\tilde{Q}(X) := Q(-X-1) \in \mathbb{Q}[X],$$

$$\tilde{F} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, n \longmapsto F(-n).$$

Für alle $n \gg 0$ gilt dann

$$\tilde{Q}(n) = Q(-n-1) = F(-n-1) - F(-n) = \tilde{F}(n+1) - \tilde{F}(n).$$

Aus 2.2 folgt, dass ein $\tilde{P}(X) \in \mathbb{Q}[X]$ so existiert, dass für alle $n \gg 0$ gilt $\tilde{P}(n) = \tilde{F}(n)$.
Sei $P(X) := \tilde{P}(-X) \in \mathbb{Q}[X]$. Dann gilt für alle $n \ll 0$

$$P(n) = \tilde{P}(-n) = \tilde{F}(-n) = F(n),$$

also die Behauptung. □

Satz 2.4
Seien $R = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0} R_n$ ein homogener Ring, $H = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} H_n$ ein Artinscher graduierter R-Modul, $r \in \mathbb{N}_0$ und $R_{\geq r}H = 0$. Dann gilt $\operatorname{beg}(H) > -\infty$.

Beweis. Für $t \in \mathbb{N}_0$ ist
$$N_t := \sum_{i\leq -t} RH_i \subseteq H$$
ein graduierter R-Untermodul und für $s, t \in \mathbb{N}_0$ mit $s \leq t$ gilt $N_s \supseteq N_t$. Also ist $(N_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ eine absteigende Kette von R-Untermoduln von H und wird deshalb stationär, d.h. es gibt ein $t_0 \in \mathbb{N}_0$ so, dass für alle $t \geq t_0$ gilt $N_t = N_{t_0}$. Sei $n \leq -t_0$. Wegen $r - n \geq t_0$ gelten dann
$$N_{-n} = N_{t_0} = N_{r-n}$$
und somit
$$H_n \subseteq N_{-n} = N_{r-n} = \sum_{i\leq n-r} RH_i.$$
Es gilt nach Voraussetzung $(\sum_{i\leq n-r} RH_i)_n = 0$, und somit $H_n = 0$, also die Behauptung. □

Lemma 2.5
Seien $R = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} R_n$ ein Noetherscher graduierter Ring, $(R_0, \mathfrak{m}_0)$ lokal, $R_0/\mathfrak{m}_0$ unendlich, $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein graduiertes und von Elementen vom Grad 1 erzeugbares Ideal, $n \in \mathbb{N}$ und $\mathfrak{b}_1, ..., \mathfrak{b}_n \subseteq R$ Ideale. Gilt $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{b}_i$ für alle $i \in \{1, ..., n\}$, so existiert ein homogenes Element vom Grad 1 in $\mathfrak{a} \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{b}_i$.

Beweis. [4, Lemma 15.1.3]. □

Lemma 2.6
Seien $R = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0} R_n$ ein Noetherscher homogener Ring, $(R_0, \mathfrak{m}_0)$ lokal, $R_0/\mathfrak{m}_0$ unendlich und $H = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} H_n$ ein Artinscher graduierter R-Modul. Dann existiert ein $x \in R_1$ so, dass für $n \ll 0$ folgende exakte Sequenz in $\mathscr{C}(R_0)$ besteht:
$$\mathbb{S} : 0 \longrightarrow (0 :_{H_n} x) \longrightarrow H_n \xrightarrow{x\cdot} H_{n+1} \longrightarrow 0.$$

Beweis. Weil H Artinsch ist, besitzt H eine minimale Sekundärzerlegung, d.h.
$$H = S^{(1)} + \cdots + S^{(N)}$$
mit $N \in \mathbb{N}$, wobei $S^{(j)}$ für $j \in \{1, ..., N\}$ ein $\mathfrak{p}_j$-sekundärer R-Modul ist und
$$\{\mathfrak{p}_1, ..., \mathfrak{p}_N\} = \operatorname{Att}_R(H).$$
OBdA seien $\mathfrak{p}_1, ..., \mathfrak{p}_r \in \operatorname{Var}(R_+)$ und $\mathfrak{p}_{r+1}, ..., \mathfrak{p}_N \notin \operatorname{Var}(R_+)$ mit $r \in \{0, ..., N\}$. Sei $j \in \{1, ...r\}$. Dann gilt
$$R_+ \subseteq \mathfrak{p}_j = \sqrt{(0 \underset{R}{:} S^{(j)})}.$$

Da R Noethersch ist, gibt es also ein $k \in \mathbb{N}$ mit $R_+^k S^{(j)} = 0$. Weil R homogen ist, gilt $R_+^k = R_{\geq k}$, und aus Satz 2.4 folgt $\text{beg}(S^{(j)}) > -\infty$ für jedes $j \in \{1, ...r\}$. Für alle $n \ll 0$ gilt also

$$H_n = S_n^{(r+1)} + \cdots + S_n^{(N)}.$$

Weil $R_0/\mathfrak{m}_0$ unendlich ist folgt aus Lemma 2.5, dass ein

$$x \in R_1 \setminus \bigcup(\text{Att}_R(H) \setminus \text{Var}(R_+))$$

existiert. Wegen $x \notin \bigcup_{j=r+1}^N \mathfrak{p}_j$ ist die Abbildung $H_n \xrightarrow{x\cdot} H_{n+1}$ für alle $n \ll 0$ surjektiv mit Kern $(0 \underset{H_n}{:} x)$, und es besteht die Sequenz $\mathbb{S}$. □

Bemerkung 2.7
Unter den Voraussetzungen von Lemma 2.6 und falls $\text{beg}(H) = -\infty$, kann das x mit den dort beschriebenen Eigenschaften in $R_1 \setminus \mathfrak{m}_0 R_1$ gewählt werden.

Beweis. Falls $\mathfrak{m}_0 R_1 = R_1$, so wäre nach dem Lemma von Nakayama $R_1 = 0$, also auch $R_+ = 0$. Nun folgte wegen $R_+ H = 0$ aus Satz 2.4 ein Widerspruch zu $\text{beg}(H) = -\infty$. Wir nehmen an, es wären $\mathfrak{m}_0 R_1 \neq R_1$ und $x \in \mathfrak{m}_0 R_1$. Sei $n \ll 0$. Die Abbildung

$$H_n/\mathfrak{m}_0 H_n \overset{(x+\mathfrak{m}_0 R_1)\cdot = 0}{\longrightarrow} H_{n+1}/\mathfrak{m}_0 H_{n+1}$$

wäre dann surjektiv, d.h. $\mathfrak{m}_0 H_{n+1} = H_{n+1}$ und aus dem Lemma von Nakayama folgte $H_{n+1} = 0$, also wieder ein Widerspruch zu $\text{beg}(H) = -\infty$. □

Satz 2.8
Seien $R = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0} R_n$ ein Noetherscher homogener Ring, $(R_0, \mathfrak{m}_0)$ lokal, $R_0/\mathfrak{m}_0$ unendlich und $H = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} H_n$ ein Artinscher graduierter R-Modul. Dann existiert ein Polynom $P_H(X) \in \mathbb{Q}[X]$ so, dass für alle $n \ll 0$ gilt $l_{R_0}(H_n) = P_H(n)$.

Beweis. Sei $K := R_0/\mathfrak{m}_0$. $R_1/\mathfrak{m}_0 R_1$ ist ein R_0-Modul, der von $\mathfrak{m}_0$ annulliert wird und kann daher in kanonischer Weise als K-Vektorraum aufgefasst werden. Es bezeichne im folgenden $\dim_K(\cdot)$ die K-Vektorraumdimension. Wir beweisen die Behauptung durch Induktion nach $\dim_K(R_1/\mathfrak{m}_0 R_1)$.
i) Sei $\dim_K(R_1/\mathfrak{m}_0 R_1) = 0$. Dann ist $R_1/\mathfrak{m}_0 R_1 = 0$, also $\mathfrak{m}_0 R_1 = R_1$ und nach dem Lemma von Nakayama folgt $R_1 = 0$. Da R homogen ist, ist $R_+ = 0$ und somit erfüllt wegen $R_+ H = 0$ und Satz 2.4 das Nullpolynom die Behauptung.
ii) Seien $\dim_K(R_1/\mathfrak{m}_0 R_1) > 0$ und die Behauptung wahr für Artinsche graduierte Moduln über einem Noetherschen homogenen Ring $S = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0} S_n$ mit lokalem Grundring $(S_0, \mathfrak{n}_0)$ und unendlichem Restekörper $L := S_0/\mathfrak{n}_0$ so, dass $\dim_L(S_1/\mathfrak{n}_0 S_1) < \dim_K(R_1/\mathfrak{m}_0 R_1)$.
Falls $\text{beg}(H) > -\infty$, so erfüllt das Nullpolynom wiederum die Behauptung. Sei deshalb oBdA $\text{beg}(H) = -\infty$. Weil $R_0/\mathfrak{m}_0$ unendlich ist existiert nach Lemma 2.6 und Bemerkung 2.7 ein

$$x \in R_1 \setminus (\mathfrak{m}_0 R_1 \cup (\bigcup(\text{Att}_R(H) \setminus \text{Var}(R_+))))$$

und für $n \ll 0$ besteht die folgende exakte Sequenz in $\mathscr{C}(R_0)$:

$$\mathbb{S} : 0 \longrightarrow (0 :_{H_n} x) \longrightarrow H_n \xrightarrow{x\cdot} H_{n+1} \longrightarrow 0.$$

Sei $\bar{R} := R/xR$. Dann ist $(0 :_H x)$ ein Artinscher graduierter $\bar{R}$-Modul. Wegen $x \notin \mathfrak{m}_0 R_1$ gilt $xR_0 \cap \mathfrak{m}_0 R_1 = 0$, und es folgt aus Lemma 2.1 (mit $A = R_0$, $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}_0$, $M = R_1$ und $V = xR_1$), dass in $\mathscr{C}(R_0)$ folgende exakte Sequenz besteht:

$$0 \longrightarrow xR_0 \longrightarrow R_1/\mathfrak{m}_0 R_1 \longrightarrow \bar{R}_1/\mathfrak{m}_0 \bar{R}_1 \longrightarrow 0.$$

Mit der Additivität der Länge folgt nun

$$l_{R_0}(\bar{R}_1/\mathfrak{m}_0\bar{R}_1) = l_{R_0}(R_1/\mathfrak{m}_0 R_1) - l_{R_0}(xR_0).$$

$\bar{R}_1/\mathfrak{m}_0\bar{R}_1$ und $R_1/\mathfrak{m}_0 R_1$ werden von $\mathfrak{m}_0$ annulliert und können deswegen in kanonischer Weise als K-Vektorräume aufgefasst werden, wobei gilt

$$l_{R_0}(\bar{R}_1/\mathfrak{m}_0\bar{R}_1) = l_K(\bar{R}_1/\mathfrak{m}_0\bar{R}_1) = \dim_K(\bar{R}_1/\mathfrak{m}_0\bar{R}_1),$$

$$l_{R_0}(R_1/\mathfrak{m}_0 R_1) = l_K(R_1/\mathfrak{m}_0 R_1) = \dim_K(R_1/\mathfrak{m}_0 R_1).$$

Zudem gilt $l_{R_0}(xR_0) = 1$, und es folgt jetzt aus obiger Gleichung für die Längen

$$\dim_K(\bar{R}_1/\mathfrak{m}_0\bar{R}_1) = \dim_K(R_1/\mathfrak{m}_0 R_1) - 1.$$

Nach Induktionsannahme gilt die Behauptung deshalb für den R-Modul $(0 :_H x)$, und mit der Additivität der Länge folgt aus der Exaktheit der Sequenz $\mathbb{S}$, dass die Funktion

$$\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, n \mapsto l_{R_0}(H_n) - l_{R_0}(H_{n+1})$$

antipolynomial ist. Aus Lemma 2.3 folgt jetzt die Behauptung. □

2.2 Hilbert-Samuel-Polynome

Notationen 2.9
Seien im folgenden $(A, \mathfrak{m})$ ein Noetherscher lokaler Ring, $\mathfrak{q} \subseteq A$ ein $\mathfrak{m}$-primäres Ideal und T ein endlich erzeugter A-Modul mit $\dim(T) = d \in \mathbb{N}_0$.

Definition 2.10
Die Funktion

$$H_{T,\mathfrak{q}} : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0, n \mapsto l_A(T/\mathfrak{q}^{n+1}T)$$

heisst die **Hilbert-Samuel-Funktion von T bezüglich $\mathfrak{q}$**.

Bemerkung und Definition 2.11
In [7, Kapitel 4] und [4, Kapitel 17] wird gezeigt, dass ein eindeutig bestimmtes Polynom $P_{T,\mathfrak{q}}(X) \in \mathbb{Q}[X]$ vom Grad d existiert so, dass für alle $n \gg 0$ gilt

$$P_{T,\mathfrak{q}}(n) = H_{T,\mathfrak{q}}(n).$$

$P_{T,\mathfrak{q}}(X)$ heisst das **Hilbert-Samuel-Polynom von T bezüglich $\mathfrak{q}$**.

Bemerkung und Definition 2.12
Ebenfalls in [7, Kapitel 4] und [4, Kapitel 17] wird gezeigt, dass sich das Hilbert-Samuel-Polynom $P_{T,\mathfrak{q}}(X)$ darstellen lässt in der Form

$$P_{T,\mathfrak{q}}(X) = \sum_{i=0}^{d-1} (-1)^{d-i-1} e_{d-i-1}(\mathfrak{q}, T) \binom{X+i}{i}$$

mit Zahlen $e_0(\mathfrak{q}, T) \in \mathbb{N}$ und $e_1(\mathfrak{q}, T), ..., e_{d-1}(\mathfrak{q}, T) \in \mathbb{Z}$. Für $i \in \{0, ..., d-1\}$ heisst hierbei $e_i(\mathfrak{q}, T)$ der **i-te Hilbert-Samuel-Koeffizient von T bezüglich $\mathfrak{q}$**.

Definition 2.13
$\mu(T, \mathfrak{q}) := \min\{n \in \mathbb{N}_0 | \forall m \geq n : P_{T,\mathfrak{q}}(m) = H_{T,\mathfrak{q}}(m)\}$ heisst die **Postulationszahl von T bezüglich $\mathfrak{q}$**.

Bemerkung 2.14
Es gelten die Voraussetzungen von oben, aber es sei jetzt $\dim(T) = 1$. Dann ist das Hilbert-Samuel-Polynom von T bezüglich $\mathfrak{q}$ linear, d.h. es gilt

$$P_{T,\mathfrak{q}}(X) = e_0(\mathfrak{q}, T)X - e_1(\mathfrak{q}, T) \text{ mit } e_0(\mathfrak{q}, T) \in \mathbb{N} \text{ und } e_1(\mathfrak{q}, T) \in \mathbb{Z}.$$

Kapitel 3

Antipolynomialität des ersten Hilbert-Samuel-Koeffizienten

Wir betrachten jetzt die Situation eines graduierten Moduls M über einem Noetherschen homogenen Ring R mit eindimensionalem lokalem Grundring $(R_0, \mathfrak{m}_0)$. Die graduierten Komponenten $H^i_{R_+}(M)_n$ der lokalen Kohomologiemoduln $H^i_{R_+}(M)$ sind endlich erzeugte R_0-Moduln, also von der Dimension ≤ 1. Aus [2, Theorem 3.5] (vgl. Korollar 3.25) folgt, dass diese Dimension einen konstanten Wert $\delta \in \{-\infty, 0, 1\}$ annimmt, sobald $n \ll 0$. Wir interessieren uns hier besonders für den Fall $\delta = 1$. Somit liegt genau die Situation vor, die im letzten Kapitel untersucht wurde. Insbesondere wissen wir, dass die zugehörigen Hilbert-Samuel-Polynome von $H^i_{R_+}(M)_n$ bezüglich eines $\mathfrak{m}_0$-primären Ideals $\mathfrak{q}_0$ für alle $n \ll 0$ linear sind, d.h. dass darin nur die Hilbert-Samuel-Koeffizienten e_0 und e_1 auftreten. Es liegt nahe, die folgenden beiden Funktionen zu betrachten:

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, n \mapsto e_0(\mathfrak{q}_0, H^i_{R_+}(M)_n),$$

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, n \mapsto e_1(\mathfrak{q}_0, H^i_{R_+}(M)_n).$$

In [2] wird gezeigt, dass die erste Funktion antipolynomial ist. Unser Ziel ist es, zu zeigen, dass auch die zweite Funktion diese Eigenschaft hat.

In einem ersten kurzen Abschnitt stellen wir einige Lemmata bereit, welche Aussagen über den Zusammenhang zwischen der Dimension eines Moduls und seinen assoziierten Primidealen machen. Im darauffolgenden Abschnitt untersuchen wir – wieder in der lokalen Situation des letzten Kapitels, das heisst über einem eindimensionalen, Noetherschen lokalen Ring $(R, \mathfrak{m})$ mit unendlichem Restekörper und bezüglich eines $\mathfrak{m}$-primären Ideals $\mathfrak{q}$ –, welchen Einfluss die $\mathfrak{m}$-Torsion eines Moduls auf sein Hilbert-Samuel-Polynom hat. Anschliessend drücken wir den ersten Hilbert-Samuel-Koeffizienten eines $\mathfrak{m}$-torsionsfreien Moduls mit Hilfe der Multiplizität $e_0(\mathfrak{q}, T)$ und der im ersten Kapitel untersuchten Regularitäten aus. Diese beiden Resultate liefern zusammen eines Darstellung von $e_1(\mathfrak{q}, T)$ für einen eindimensionalen Modul T über R. Zusammen mit dem oben erwähnten und einigen weiteren Resultaten aus [2] können wir mit Hilfe dieser Darstellung die gewünschte Antipolynomialität zeigen.

3.1 Dimension und assoziierte Primideale

Es gelten weiterhin die Notationen von 1.1.

Satz 3.1
Seien A ein Noetherscher Ring, $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal und T ein endlich erzeugter A-Modul. Dann gelten:
a) $\mathrm{Ass}_A(\Gamma_{\mathfrak{a}}(T)) = \mathrm{Ass}_A(T) \cap \mathrm{Var}(\mathfrak{a})$.
b) $\mathrm{Ass}_A(T/\Gamma_{\mathfrak{a}}(T)) = \mathrm{Ass}_A(T) \setminus \mathrm{Ass}_A(\Gamma_{\mathfrak{a}}(T))$.

Beweis. [1, Bemerkung 15.10]. □

Notationen 3.2
Seien A ein Ring, $\mathfrak{a} \in A$ ein Ideal und T ein A-Modul. Wir bezeichnen mit $\mathrm{Ass}^\circ_A(T)$ bzw. $\mathrm{Supp}^\circ_A(T)$ bzw. $\mathrm{Var}^\circ(\mathfrak{a})$ die Teilmenge der bezüglich der Inklusion minimalen Elemente von $\mathrm{Ass}_A(T)$ bzw. $\mathrm{Supp}_A(T)$ bzw. $\mathrm{Var}(\mathfrak{a})$.

Satz 3.3
Seien A ein Noetherscher Ring und T ein endlich erzeugter A-Modul. Dann gilt

$$\mathrm{Ass}^\circ_A(T) = \mathrm{Supp}^\circ_A(T).$$

Beweis. [8, Theorem 6.5]. □

Satz 3.4
Seien $(A, \mathfrak{m})$ ein Noetherscher lokaler Ring, $\dim(A) = 1$, *T ein endlich erzeugter A-Modul,* $\dim(T) = 1$ *und* $\bar{T} := T/\Gamma_{\mathfrak{m}}(T)$. *Dann gilt* $\dim(\bar{T}) = 1$.

Beweis. OBdA sei $\Gamma_{\mathfrak{m}}(T) \neq 0$. Dann gelten nach Satz 3.1

$$\emptyset \neq \mathrm{Ass}_A(\Gamma_{\mathfrak{m}}(T)) \subseteq \mathrm{Var}(\mathfrak{m}) = \{\mathfrak{m}\},$$

$$\emptyset \neq \mathrm{Ass}_A(\bar{T}) = \mathrm{Ass}_A(T) \setminus \{\mathfrak{m}\}.$$

Da A eindimensional ist, gilt $\mathrm{Ass}^\circ_A(\bar{T}) = \mathrm{Ass}_A(\bar{T})$. Nach Satz 1.16 a) gilt $\mathrm{Supp}^\circ_A(\bar{T}) = \mathrm{Var}^\circ((0 :_A \bar{T}))$. Es folgt mit Satz 3.3

$$\emptyset \neq \mathrm{Ass}_A(\bar{T}) = \mathrm{Ass}^\circ_A(\bar{T}) = \mathrm{Supp}^\circ_A(\bar{T}) = \mathrm{Var}^\circ((0 :_A \bar{T})).$$

Jedes minimale Primoberideal von $(0 :_A \bar{T})$ ist deshalb echt in $\mathfrak{m}$ enthalten. Daraus folgt

$$1 \geq \dim(\bar{T}) = \dim(A/(0 :_A \bar{T})) \geq 1,$$

also die Behauptung. □

3.2 Darstellung von $e_1(\mathfrak{q}, T)$

Satz 3.5 (Lemma von Artin-Rees)
Seien A ein Noetherscher Ring, $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal, T ein endlich erzeugter A-Modul und $U \subseteq T$ ein A-Untermodul. Dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$ so, dass für alle $n \geq n_0$ gilt

$$\mathfrak{a}^n T \cap U = \mathfrak{a}^{n-n_0}(\mathfrak{a}^{n_0} T \cap U).$$

Beweis. [5, Satz 5.5]. □

Lemma 3.6
Seien A ein Noetherscher Ring, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b} \subseteq A$ Ideale mit $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$ und T ein endlich erzeugter A-Modul. Dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$ so, dass für alle $n \geq n_0$ gilt

$$\mathfrak{b}^n T \cap \Gamma_{\mathfrak{a}}(T) = 0.$$

Beweis. Nach Satz 3.5 existiert ein $n_0' \in \mathbb{N}_0$ so, dass für alle $n \geq n_0'$ gilt

$$\mathfrak{a}^n T \cap \Gamma_{\mathfrak{a}}(T) = \mathfrak{a}^{n-n_0'}(\mathfrak{a}^{n_0'} T \cap \Gamma_{\mathfrak{a}}(T)) \subseteq \mathfrak{a}^{n-n_0'} \Gamma_{\mathfrak{a}}(T).$$

Weil T endlich erzeugt ist, existiert ein $k \in \mathbb{N}_0$ so, dass gilt $\Gamma_{\mathfrak{a}}(T) = (0 :_T \mathfrak{a}^k)$. Offensichtlich gilt für $n \geq k$ dann $\mathfrak{a}^n \Gamma_{\mathfrak{a}}(T) = 0$.
Sei $n_0 := n_0' + k$. Für $n \geq n_0$ gilt dann

$$\mathfrak{a}^n T \cap \Gamma_{\mathfrak{a}}(T) \subseteq \mathfrak{a}^{n-n_0'} \Gamma_{\mathfrak{a}}(T) = \mathfrak{a}^{k+(n-n_0)} \Gamma_{\mathfrak{a}}(T) = 0,$$

also $\mathfrak{a}^n T \cap \Gamma_{\mathfrak{a}}(T) = 0$. Wegen $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$ gilt für $n \in \mathbb{N}_0$ offensichtlich $\mathfrak{b}^n \subseteq \mathfrak{a}^n$ und somit $\mathfrak{b}^n T \subseteq \mathfrak{a}^n T$. Daraus folgt, dass für alle $n \geq n_0$ gilt

$$\mathfrak{b}^n T \cap \Gamma_{\mathfrak{a}}(T) \subseteq \mathfrak{a}^n T \cap \Gamma_{\mathfrak{a}}(T) = 0,$$

und dies zeigt die Behauptung. □

Im folgenden seien

- $(A, \mathfrak{m})$ ein Noetherscher lokaler Ring,
- $\mathfrak{q} \subseteq A$ ein $\mathfrak{m}$-primäres Ideal und
- T ein endlich erzeugter A-Modul.

Satz 3.7
Sei $n_0 \in \mathbb{N}_0$ so, dass für alle $n \geq n_0$ gilt $\mathfrak{q}^n T \cap \Gamma_{\mathfrak{m}}(T) = 0$. Dann gilt für alle $n \geq n_0$

$$l_A(T/\mathfrak{q}^n T) = l_A((T/\Gamma_{\mathfrak{m}}(T))/\mathfrak{q}^n(T/\Gamma_{\mathfrak{m}}(T))) + l_A(\Gamma_{\mathfrak{m}}(T)).$$

Beweis. Sei $n \geq n_0$. Dann besteht wegen $\mathfrak{q}^n T \cap \Gamma_{\mathfrak{m}}(T) = 0$ nach Lemma 2.1 (mit $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}, M = T, U = \mathfrak{q}^n T$ und $V = \Gamma_{\mathfrak{m}}(T)$ folgende exakte Sequenz in $\mathscr{C}(A)$:

$$0 \longrightarrow \Gamma_{\mathfrak{m}}(T) \longrightarrow T/\mathfrak{q}^n T \longrightarrow (T/\Gamma_{\mathfrak{m}}(T))/\mathfrak{q}^n(T/\Gamma_{\mathfrak{m}}(T)) \longrightarrow 0.$$

Aus der Additivität der Länge folgt jetzt die Behauptung. □

Korollar 3.8
Es gilt $P_{T,\mathfrak{q}}(X) = P_{T/\Gamma_{\mathfrak{m}}(T),\mathfrak{q}}(X) + l_A(\Gamma_{\mathfrak{m}}(T))$.

Beweis. Nach Definition des Hilbert-Samuel-Polynoms gilt für jeden endlich erzeugten A-Modul U und alle $m \gg 0$ die Gleichheit $l_A(U/\mathfrak{q}^{m+1}U) = P_{U,\mathfrak{q}}(m)$. Jetzt folgt die Behauptung (mit $U = T$ bzw. $U = T/\Gamma_{\mathfrak{m}}(T)$) aus Lemma 3.6 und Satz 3.7. □

Definition 3.9
Seien $R = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0} R_n$ ein Noetherscher homogener Ring und $M = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n$ ein endlich erzeugter graduierter R-Modul. Die Funktion

$$C_M : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, n \mapsto l_{R_0}(M_n) - \sum_{i\in\mathbb{N}_0} (-1)^i l_{R_0}(H^i_{R_+}(M)_n)$$

heisst die **charakteristische Funktion von** M.

Satz 3.10
Seien $R = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0} R_n$ *ein Noetherscher homogener Ring,* R_0 *Artinsch und* $M = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n \neq 0$ *ein endlich erzeugter graduierter* R*-Modul. Dann existiert ein Polynom* $P_M \in \mathbb{Q}[X]$ *mit* $\deg(P_M) = \dim(M) - 1$ *so, dass für alle* $n \in \mathbb{Z}$ *gilt* $P_M(n) = C_M(n)$.

Beweis. [4, Theorem 17.1.6]. □

Zusätzlich zu den bisherigen Voraussetzungen sei im folgenden

- $\dim(A) = 1$.

Satz 3.11
Es gilt $\dim(\mathrm{Gr}(\mathfrak{q}, T)) = \dim(T)$.

Beweis. [7, Theorem 4.4.6]. □

Satz 3.12
Seien $\dim(T) = 1$, $\Gamma_{\mathfrak{m}}(T) = 0$ *und* $\bar{n_0} \in \mathbb{N}_0$ *mit* $\bar{n_0} > reg(\mathscr{F}(\mathfrak{q}))$. *Für alle* $n > \bar{n_0}$ *gilt dann*

$$l_A(\mathfrak{q}^n T/\mathfrak{q}^{n+1}T) = e_0(\mathfrak{q}, T).$$

Beweis. Wegen der Additivität der Länge gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$l_A(\mathfrak{q}^n T/\mathfrak{q}^{n+1}T) = l_A(T/\mathfrak{q}^{n+1}T) - l_A(T/\mathfrak{q}^n T).$$

Nach Definition können die beiden rechts stehenden Längen für grosse n durch das Hilbert-Samuel-Polynom ausgedrückt werden, und es ergibt sich für $n \gg 0$ die Gleichung

$$l_A(\mathfrak{q}^n T/\mathfrak{q}^{n+1}T) = e_0(\mathfrak{q}, T)n - e_1(\mathfrak{q}, T) - e_0(\mathfrak{q}, T)(n-1) + e_1(\mathfrak{q}, T) = e_0(\mathfrak{q}, T).$$

Wenn wir jetzt zeigen, dass $l_A(\mathfrak{q}^n T/\mathfrak{q}^{n+1}T)$ für $n > \bar{n_0}$ konstant ist, so folgt daraus die Behauptung. Dazu betrachten wir die charakteristische Funktion von $\mathrm{Gr}(\mathfrak{q}, T)$

$$C_{\mathrm{Gr}(\mathfrak{q},T)} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, n \mapsto l_{Gr(\mathfrak{q})_0}(\mathrm{Gr}(\mathfrak{q}, T)_n) - \sum_{i\in\mathbb{N}_0} (-1)^i l_{Gr(\mathfrak{q})_0}(H^i_{Gr(\mathfrak{q})_+}(\mathrm{Gr}(\mathfrak{q}, T))_n).$$

Weil $\mathfrak{q}$ ein $\mathfrak{m}$-primäres Ideal ist, ist $Gr(\mathfrak{q})_0 = A/\mathfrak{q}$ Artinsch, und nach Satz 3.10 ist $C_{\mathrm{Gr}(\mathfrak{q},T)}$ ein Polynom vom Grad $\dim(\mathrm{Gr}(\mathfrak{q},T)) - 1$, nach Satz 3.11 also konstant.
Sei jetzt $n > \bar{n_0}$. Wegen $\Gamma_{\mathfrak{m}}(T) = 0$ gilt nach Satz 1.31 dann auch $n > \mathrm{reg}(\mathrm{Gr}(\mathfrak{q},T))$. Für alle $i \in \mathbb{N}_0$ gilt also $H^i_{Gr(\mathfrak{q})_+}(\mathrm{Gr}(\mathfrak{q},T))_n = 0$, und es folgt

$$C_{\mathrm{Gr}(\mathfrak{q},T)}(n) = l_{Gr(\mathfrak{q})_0}(\mathrm{Gr}(\mathfrak{q},T)_n).$$

Also ist

$$l_A(\mathfrak{q}^nT/\mathfrak{q}^{n+1}T) = l_{A/\mathfrak{q}}(\mathfrak{q}^nT/\mathfrak{q}^{n+1}T) = l_{Gr(\mathfrak{q})_0}(\mathrm{Gr}(\mathfrak{q},T)_n)$$

für $n > \bar{n_0}$ konstant, und es folgt die Behauptung. □

Korollar 3.13
Seien $\dim(T) = 1$, $\Gamma_{\mathfrak{m}}(T) = 0$ *und* $\bar{n_0} \in \mathbb{N}_0$ *mit* $\bar{n_0} > reg(\mathscr{F}(\mathfrak{q}))$.
a) Für alle $n \geq \bar{n_0}$ *gilt*

$$l_A(T/\mathfrak{q}^{n+1}T) = l_A(T/\mathfrak{q}^{\bar{n_0}+1}T) + e_0(\mathfrak{q},T)(n - \bar{n_0}).$$

b) Es gilt

$$e_1(\mathfrak{q},T) = e_0(\mathfrak{q},T)\bar{n_0} - l_A(T/\mathfrak{q}^{\bar{n_0}+1}T).$$

Beweis. a) Sei $n \geq \bar{n_0}$. Dann gilt

$$l_A(T/\mathfrak{q}^{n+1}T) = \sum_{i=0}^{n} l_A(\mathfrak{q}^iT/\mathfrak{q}^{i+1}T) = \sum_{i=0}^{\bar{n_0}} l_A(\mathfrak{q}^iT/\mathfrak{q}^{i+1}T) + \sum_{i=\bar{n_0}+1}^{n} l_A(\mathfrak{q}^iT/\mathfrak{q}^{i+1}T)$$

$$\overset{3.12}{=} l_A(T/\mathfrak{q}^{\bar{n_0}+1}T) + e_0(\mathfrak{q},T)(n - \bar{n_0}),$$

also die Behauptung.
b) Für alle $n \gg 0$ gilt $l_A(T/\mathfrak{q}^{n+1}T) = e_0(\mathfrak{q},T)n - e_1(\mathfrak{q},T)$. Somit folgt mit der Aussage a), dass für $n \gg 0$ gilt

$$e_0(\mathfrak{q},T)n - e_1(\mathfrak{q},T) = e_0(\mathfrak{q},T)(n - \bar{n_0}) + l_A(T/\mathfrak{q}^{\bar{n_0}+1}T).$$

Daraus ergibt sich

$$e_1(\mathfrak{q},T) = e_0(\mathfrak{q},T)(n - n + \bar{n_0}) - l_A(T/\mathfrak{q}^{\bar{n_0}+1}T) = e_0(\mathfrak{q},T)\bar{n_0} - l_A(T/\mathfrak{q}^{\bar{n_0}+1}T).$$

□

Satz 3.14
Seien $(B,\mathfrak{n})$ *ein Noetherscher lokaler Ring,* $B/\mathfrak{n}$ *unendlich,* $\mathfrak{p} \subseteq B$ *ein* $\mathfrak{n}$*-primäres Ideal,* U *ein endlich erzeugter* B*-Modul und* $V \subseteq U$ *ein* B*-Untermodul. Ist* $\dim(V) \neq \dim(U)$, *so gilt* $e_0(\mathfrak{p},U) = e_0(\mathfrak{p},U/V)$.

Beweis. [1, Satz 15.25]. □

Lemma 3.15
Seien $A/\mathfrak{m}$ unendlich und $\dim(T) = 1$. *Dann gilt*

$$e_0(\mathfrak{q}, T) = e_0(\mathfrak{q}, T/\Gamma_{\mathfrak{m}}(T)).$$

Beweis. Sei $\bar{T} := T/\Gamma_{\mathfrak{m}}(T)$. Es besteht folgende exakte Sequenz in $\mathscr{C}(A)$:

$$0 \longrightarrow \Gamma_{\mathfrak{m}}(T) \longrightarrow T \longrightarrow \bar{T} \longrightarrow 0.$$

Für alle $n \gg 0$ folgt aus Lemma 3.6, dass $\mathfrak{q}^n\Gamma_{\mathfrak{m}}(T) = 0$, also $\Gamma_{\mathfrak{m}}(T)/\mathfrak{q}^n\Gamma_{\mathfrak{m}}(T) \cong \Gamma_{\mathfrak{m}}(T)$, und somit gilt auch $l_A(\Gamma_{\mathfrak{m}}(T)/\mathfrak{q}^n\Gamma_{\mathfrak{m}}(T)) = l_A(\Gamma_{\mathfrak{m}}(T))$. Nach Definition gilt für $n \gg 0$

$$l_A(\Gamma_{\mathfrak{m}}(T)/\mathfrak{q}^n\Gamma_{\mathfrak{m}}(T)) = P_{\Gamma_{\mathfrak{m}}(T),\mathfrak{q}}(n-1),$$

wobei $\deg(P) = \dim(\Gamma_{\mathfrak{m}}(T))$. Wegen dem oben gezeigten ist P aber konstant und somit $\dim(\Gamma_{\mathfrak{m}}(T)) = 0$. Nach 3.14 folgt jetzt aber die Behauptung. □

Satz 3.16
Seien $A/\mathfrak{m}$ unendlich, $\bar{n_0} \in \mathbb{N}_0$ mit $\bar{n_0} > reg(\mathscr{F}(\mathfrak{q}))$ und $\dim(T) = 1$. *Dann gilt*

$$e_1(\mathfrak{q}, T) = e_0(\mathfrak{q}, T)\bar{n_0} - l_A(T/\mathfrak{q}^{\bar{n_0}+1}T) - l_A(\mathfrak{q}^{\bar{n_0}+1}T \cap \Gamma_{\mathfrak{m}}(T)).$$

Beweis. Sei $\bar{T} := T/\Gamma_{\mathfrak{m}}(T)$. Es gilt nach dem ersten Isomorphiesatz

$$(\mathfrak{q}^nT + \Gamma_{\mathfrak{m}}(T))/\mathfrak{q}^nT \cong \Gamma_{\mathfrak{m}}(T)/(\mathfrak{q}^nT \cap \Gamma_{\mathfrak{m}}(T)).$$

Deshalb besteht in $\mathscr{C}(A)$ folgende exakte Sequenz:

$$0 \longrightarrow \Gamma_{\mathfrak{m}}(T)/(\mathfrak{q}^nT \cap \Gamma_{\mathfrak{m}}(T)) \longrightarrow T/\mathfrak{q}^nT \longrightarrow \bar{T}/\mathfrak{q}^n\bar{T} \longrightarrow 0.$$

Diese Sequenz liefert wegen der Additivität der Länge für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ die Gleichheit

$$l_A(T/\mathfrak{q}^nT) = l_A(\bar{T}/\mathfrak{q}^n\bar{T}) + l_A(\Gamma_{\mathfrak{m}}(T)/\mathfrak{q}^nT \cap \Gamma_{\mathfrak{m}}(T))$$

$$= l_A(\bar{T}/\mathfrak{q}^n\bar{T}) + l_A(\Gamma_{\mathfrak{m}}(T)) - l_A(\mathfrak{q}^nT \cap \Gamma_{\mathfrak{m}}(T)).$$

Daraus ergibt sich für jedes $n \in \mathbb{N}_0$

$$l_A(\bar{T}/\mathfrak{q}^n\bar{T}) = l_A(T/\mathfrak{q}^nT) + l_A(\mathfrak{q}^nT \cap \Gamma_{\mathfrak{m}}(T)) - l_A(\Gamma_{\mathfrak{m}}(T)). \tag{3.1}$$

Nach Satz 3.4 ist $\bar{T}$ eindimensional, und wir können wegen $\Gamma_{\mathfrak{m}}(\bar{T}) = 0$ das Korollar 3.13 a) anwenden. Daraus folgt, dass für jedes $n \geq \bar{n_0}$ gilt

$$l_A(\bar{T}/\mathfrak{q}^{n+1}\bar{T}) = l_A(\bar{T}/\mathfrak{q}^{\bar{n_0}+1}\bar{T}) + e_0(\mathfrak{q},\bar{T})(n-\bar{n_0})$$

$$\overset{3.15}{=} l_A(\bar{T}/\mathfrak{q}^{\bar{n_0}+1}\bar{T}) + e_0(\mathfrak{q},T)(n-\bar{n_0})$$

$$\overset{(3.1)}{=} l_A(T/\mathfrak{q}^{\bar{n_0}+1}T) + l_A(\mathfrak{q}^{\bar{n_0}+1}T \cap \Gamma_{\mathfrak{m}}(T)) - l_A(\Gamma_{\mathfrak{m}}(T)) + e_0(\mathfrak{q},T)(n-\bar{n_0}). \qquad (3.2)$$

Sei jetzt $m \gg 0$. Dann gilt $l_A(T/\mathfrak{q}^{m+1}T) = e_0(\mathfrak{q},T)m - e_1(\mathfrak{q},T)$. Daraus folgt

$$e_1(\mathfrak{q},T) = e_0(\mathfrak{q},T)m - l_A(T/\mathfrak{q}^{m+1}T) \overset{3.7}{=} e_0(\mathfrak{q},T)m - l_A(\bar{T}/\mathfrak{q}^{m+1}\bar{T}) - l_A(\Gamma_{\mathfrak{m}}(T))$$

$$\overset{(3.2)}{=} e_0(\mathfrak{q},T)m - l_A(T/\mathfrak{q}^{\bar{n_0}+1}T) - l_A(\mathfrak{q}^{\bar{n_0}+1}T \cap \Gamma_{\mathfrak{m}}(T))$$

$$+l_A(\Gamma_{\mathfrak{m}}(T)) - e_0(\mathfrak{q},T)(m-\bar{n_0}) - l_A(\Gamma_{\mathfrak{m}}(T))$$

$$= e_0(\mathfrak{q},T)\bar{n_0} - l_A(T/\mathfrak{q}^{\bar{n_0}+1}T) - l_A(\mathfrak{q}^{\bar{n_0}+1}T \cap \Gamma_{\mathfrak{m}}(T)).$$

□

3.3 Abschätzung der Postulationszahlen

Aus den bisherigen Resultaten ergibt sich leicht eine obere Schranke für die Postulationszahl eines eindimensionalen Moduls T bezüglich eines $\mathfrak{m}$-primären Ideals eines eindimensionalen lokalen Ringes $(A,\mathfrak{m})$. Konkret bedeutet dies, dass wir eine Stelle angeben können, ab welcher die Hilbert-Samuel-Funktion und das Hilbert-Samuel-Polynom übereinstimmen.

Lemma 3.17
Seien $R = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} R_n$ ein graduierter Ring, $U = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} U_n$ ein Artinscher graduierter R-Modul und $(V^{(k)})_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine absteigende Folge graduierter R-Untermoduln von U so, dass für jedes $n \in \mathbb{Z}$ ein $k_n \in \mathbb{N}_0$ existiert mit $V_n^{(k_n)} = 0$. Dann existiert ein $\bar{k} \in \mathbb{N}_0$ so, dass für alle $k \geq \bar{k}$ gilt $V^{(k)} = 0$.

Beweis. Weil U Artinsch ist, wird die Folge $(V^{(k)})_{k\in\mathbb{N}_0}$ stationär, das heisst es gibt ein $\bar{k} \in \mathbb{N}_0$ so, dass für alle $k \geq \bar{k}$ gilt $V^{(k)} = V^{(\bar{k})}$. Wäre $V^{(\bar{k})} \neq 0$, so gäbe es eine graduierte Komponente $V_n^{(\bar{k})} \neq 0$ mit $n \in \mathbb{Z}$. Weil die Folge stationär wird, wäre auch $V_n^{(k)} \neq 0$ für alle $k \geq \bar{k}$. Dies wäre ein Widerspruch, und es folgt die Behauptung. □

Satz 3.18
Seien $(A,\mathfrak{m})$ ein Noetherscher lokaler Ring, $\dim(A) = 1$, $\mathfrak{q} \subseteq A$ ein $\mathfrak{m}$-primäres Ideal, T ein endlich erzeugter A-Modul, $\dim(T) = 1$, $n_0 := \operatorname{reg}(\mathscr{F}(\mathfrak{q})) + 1$ und $k_0 \in \mathbb{N}_0$ minimal mit der Eigenschaft, dass $\mathfrak{q}^{k_0+1}T \cap \Gamma_{\mathfrak{m}}(T) = 0$. Dann gilt

$$\mu(T,\mathfrak{q}) \leq \max\{n_0, k_0\}.$$

Beweis. Nach Satz 3.16 gilt für alle $m \geq n_0$

$$e_1(\mathfrak{q}, T) = e_0(\mathfrak{q}, T) \cdot m - l_A(T/\mathfrak{q}^{m+1}T) - l_A(\mathfrak{q}^{m+1}T \cap \Gamma_{\mathfrak{m}}(T)).$$

Wegen $l_A(T/\mathfrak{q}^{m+1}T) = H_{T,\mathfrak{q}}(m)$ und $e_0(\mathfrak{q}, T) \cdot m - e_1(\mathfrak{q}, T) = P_{T,\mathfrak{q}}(m)$ folgt daraus

$$P_{T,\mathfrak{q}}(m) = H_{T,\mathfrak{q}}(m) + l_A(\mathfrak{q}^{m+1}T \cap \Gamma_{\mathfrak{m}}(T)),$$

und nach Wahl von k_0 die Behauptung. □

Satz 3.19
Seien $R = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0} R_n$ ein Noetherscher homogener Ring, $(R_0, \mathfrak{m}_0)$ lokal, $\dim(R_0) = 1$*, $\mathfrak{q}_0 \subseteq R_0$ ein $\mathfrak{m}_0$-primäres Ideal, M ein endlich erzeugter graduierter R-Modul und $i \in \mathbb{N}_0$. Dann ist $\Gamma_{\mathfrak{m}_0 R}(H^i_{R_+}(M))$ ein Artinscher R-Modul.*

Beweis. [2, Theorem 2.5] □

Korollar 3.20
Seien $R = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0} R_n$ ein Noetherscher homogener Ring, $(R_0, \mathfrak{m}_0)$ lokal, $\dim(R_0) = 1$*, $\mathfrak{q}_0 \subseteq R_0$ ein $\mathfrak{m}_0$-primäres Ideal, $M = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n$ ein endlich erzeugter graduierter R-Modul und $i \in \mathbb{N}_0$.*
a) Es gibt ein $k_0 \in \mathbb{N}_0$ so, dass für jedes $k \geq k_0$ und in jedem Grad $n \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\mathfrak{q}^{k+1} H^i_{R_+}(M)_n \cap \Gamma_{\mathfrak{m}_0}(H^i_{R_+}(M)_n) = 0.$$

b) Ist $k_0 \in \mathbb{N}_0$ wie in a) und zusätzlich minimal mit dieser Eigenschaft gewählt, so gilt für jedes $n \in \mathbb{Z}$

$$\mu(H^i_{R_+}(M)_n, \mathfrak{q}_0) \leq \max\{k_0, \operatorname{reg}(\mathscr{F}(\mathfrak{q})) + 1\}.$$

Beweis. a) Satz 3.19, Lemma 3.17. b) Satz 3.18. □

3.4 Antipolynomialität von $e_1(\mathfrak{q}, T)$

Bevor wir mit dem Beweis der Antipolynomialtät des ersten Hilbertkoeffizienten beginnen, stellen wir einige einfache Resultate über Polynome bereit.

Lemma 3.21
Sei $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ so, dass für $n \gg 0$ gilt $f(n) > 0$. Dann ist der Leitkoeffizient von f positiv.

Beweis. $f(X)$ kann dargestellt werden als $f(X) = \sum_{i=0}^{r} a_i X^i$ mit $a_r \neq 0$. Damit gilt

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(n)}{n^r}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(a_r + \frac{a_{r-1}}{X} + \cdots + \frac{a_0}{X^r}\right) = a_r.$$

Weiter gilt für $n \gg 0$ nach Voraussetzung $f(n) > 0$ und $n^r > 0$, also auch

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(n)}{n^r}\right) \geq 0.$$

Wegen $a_r \neq 0$ folgt somit $a_r = \lim_{n\to\infty}(\frac{f(n)}{n^r}) > 0$, also die Behauptung. □

Lemma 3.22
Seien $f(X), g(X) \in \mathbb{Q}[X]$ *so, dass für* $n \gg 0$ *gilt* $f(n) \geq g(n) > 0$. *Dann gilt* $\deg(f) \geq \deg(g)$.

Beweis. Es gibt Darstellungen $f(X) = \sum_{i=0}^{r} a_i X^i$ und $g(X) = \sum_{i=0}^{s} b_i X^i$ mit $r = \deg(f)$ und $s = \deg(g)$, und nach Lemma 3.21 gilt $a_r, b_s > 0$. Für $n \gg 0$ gilt nach Voraussetzung $g(n) - f(n) \leq 0$ und $n^s > 0$, also

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{g(n) - f(n)}{n^s}\right) \leq 0.$$

Angenommen, es gälte $\deg(g) > \deg(f)$, so folgte

$$b_s = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{g(n) - f(n)}{n^s}\right) \leq 0,$$

was ein Widerspruch wäre. □

Lemma 3.23
Seien $f(X), g(X) \in \mathbb{Q}[X]$ *so, dass für* $n \ll 0$ *gilt* $f(n) \geq g(n) \geq 0$. *Dann gilt* $\deg(f) \geq \deg(g)$.

Beweis. OBdA seien $f, g \neq 0$. Seien $\bar{f}(X) := f(-X)$ und $\bar{g}(X) := g(-X)$. Dann gelten $\deg(\bar{f}) = \deg(f)$, $\deg(\bar{g}) = \deg(g)$ und für $n \gg 0$ auch $\bar{f}(n) \geq \bar{g}(n) > 0$. Aus Lemma 3.22 folgt jetzt $\deg(\bar{f}) \geq \deg(\bar{g})$ und somit die Behauptung. □

Im folgenden seien

- $R = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0} R_n$ ein Noetherscher homogener Ring,
- $(R_0, \mathfrak{m}_0)$ lokal,
- $\dim(R_0) = 1$,
- $\mathfrak{q}_0 \subseteq R_0$ ein $\mathfrak{m}_0$-primäres Ideal und
- M ein endlich erzeugter graduierter R-Modul.

Wir zitieren als nächstes die im folgenden benötigten Resultate aus der eingangs erwähnten Arbeit [2].

Satz 3.24
Sei $i \in \mathbb{N}_0$. *Dann gelten:*
a) Es existiert ein $P(X) \in \mathbb{Q}[X]$ *mit* $\deg(P(X)) < i$ *und so, dass für alle* $n \ll 0$ *gilt*

$$l_{R_0}((H^i_{R_+}(M)/\mathfrak{q}_0 H^i_{R_+}(M))_n) = P(n).$$

b) Es existiert ein $Q(X) \in \mathbb{Q}[X]$ *mit* $\deg(Q(X)) < i$ *und so, dass für alle* $n \ll 0$ *gilt*

$$e_0(\mathfrak{q}_0, H^i_{R_+}(M)_n) = Q(n).$$

c) Es existiert ein $\bar{Q}(X) \in \mathbb{Q}[X]$ *mit* $\deg(\bar{Q}(X)) < i$ *und so, dass für alle* $n \ll 0$ *gilt*

$$l_{R_0}(\Gamma_{\mathfrak{m}_0 R}(H^i_{R_+}(M))_n) = \bar{Q}(n).$$

d) Die Mengen $\mathrm{Ass}_{R_0}(H^i_{R_+}(M)_n)$ *sind asymptotisch stabil für* $n \to -\infty$.

Beweis. [2, Theorem 3.5] □

Korollar 3.25
Sei $i \in \mathbb{N}_0$. *Dann gilt entweder*

$$\dim(H^i_{R_+}(M)_n) \leq 0 \textit{ für alle } n \ll 0$$

oder

$$\dim(H^i_{R_+}(M)_n) = 1 \textit{ für alle } n \ll 0.$$

Beweis. Die gesuchten Dimensionen sind nur abhängig von

$$\mathrm{Var}^\circ((0 \underset{R_0}{:} H^i_{R_+}(M)_n)) = \mathrm{Ass}^\circ_{R_0}(H^i_{R_+}(M)_n).$$

Diese Mengen sind nach Satz 3.24 aber asymptotisch stabil für $n \to -\infty$. Somit gilt dies auch für die Dimensionen. □

In unserer Darstellung des ersten Hilbert-Samuel-Koeffizienten (vgl. Satz 3.16) tritt – angewandt auf die momentane Situation – die Länge von $\mathfrak{q}_0 H^i_{R_+}(M)_n \cap \Gamma_{\mathfrak{m}_0}(H^i_{R_+}(M)_n)$ als Summand auf. Während der vorangehende Satz Aussagen über die übrigen Summanden macht, brauchen wir für den abschliessenden Beweis noch das nächste Lemma.

Lemma 3.26
Sei $i \in \mathbb{N}_0$, *und für alle* $n \ll 0$ *sei* $\dim_{R_0}(H^i_{R_+}(M)_n) = 1$. *Dann existiert ein Polynom* $L(X) := L^i_{\mathfrak{q}_0,M}(X) \in \mathbb{Q}[X]$ *so, dass* $\deg(L(X)) < i$ *und dass für* $n \ll 0$ *gilt*

$$l_{R_0}(\mathfrak{q}_0 H^i_{R_+}(M)_n \cap \Gamma_{\mathfrak{m}_0}(H^i_{R_+}(M)_n)) = L(n).$$

Beweis. $\Gamma_{\mathfrak{m}_0 R}(H^i_{R_+}(M)) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \Gamma_{\mathfrak{m}_0}(H^i_{R_+}(M)_n)$ ist ein graduierter R-Modul und nach Satz 3.19 Artinsch. Sei

$$H := \mathfrak{q}_0 H^i_{R_+}(M) \cap \Gamma_{\mathfrak{m}_0 R}(H^i_{R_+}(M)).$$

Für alle $n \in \mathbb{Z}$ sei

$$H_n := \mathfrak{q}_0 H^i_{R_+}(M)_n \cap \Gamma_{\mathfrak{m}_0}(H^i_{R_+}(M)_n).$$

$H = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} H_n$ ist offensichtlich ein graduierter R-Untermodul von $\Gamma_{\mathfrak{m}_0 R}(H^i_{R_+}(M))$ und somit auch Artinsch. Jetzt folgt aus Satz 2.8 die Existenz eines Polynoms $L(X) \in \mathbb{Q}[X]$ so, dass für $n \ll 0$ gilt

$$l_{R_0}(\mathfrak{q}_0 H^i_{R_+}(M)_n \cap \Gamma_{\mathfrak{m}_0}(H^i_{R_+}(M)_n)) = L(n).$$

Es bleibt zu zeigen, dass $\deg(L(X)) < i$. Nach Satz 3.24 existiert ein $\bar{Q}(X) \in \mathbb{Q}[X]$ mit $\deg(\bar{Q}) < i$ und so, dass für $n \ll 0$ gilt

$$l_{R_0}(\Gamma_{\mathfrak{m}_0}(H^i_{R_+}(M)_n)) = \bar{Q}(n).$$

Für $n \in \mathbb{Z}$ ist H_n ein R_0-Untermodul von $\Gamma_{\mathfrak{m}_0}(H^i_{R_+}(M)_n)$, und deshalb gilt

$$l_{R_0}(H_n) \leq l_{R_0}(\Gamma_{\mathfrak{m}_0}(H^i_{R_+}(M)_n)).$$

Daraus folgt, dass für $n \ll 0$ gilt $0 \leq L(n) \leq \bar{Q}(n)$. Jetzt folgt aus Lemma 3.23, dass $\deg(L(X)) \leq \deg(\bar{Q}(X)) < i$, also die Behauptung. □

Theorem 3.27 (Antipolynomialität des ersten Hilbertkoeffizienten)
Seien $R = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} R_n$ ein Noetherscher homogener Ring, $(R_0, \mathfrak{m}_0)$ lokal mit unendlichem Restekörper, $\dim(R_0) = 1$, $\mathfrak{q}_0 \subseteq R_0$ ein $\mathfrak{m}_0$-primäres Ideal und M ein endlich erzeugter graduierter R-Modul. Weiter sei $i \in \mathbb{N}_0$, und für alle $n \ll 0$ sei $\dim_{R_0}(H^i_{R_+}(M)_n) = 1$. Dann existiert ein Polynom $E(X) := E^i_{\mathfrak{q}_0,M}(X) \in \mathbb{Q}[X]$ so, dass $\deg(E(X)) < i$ und dass für $n \ll 0$ gilt

$$e_1(\mathfrak{q}_0, H^i_{R_+}(M)_n) = E(n).$$

Beweis. Seien $n \ll 0$ und $\bar{n_0} > reg(\mathscr{R}(\mathfrak{q}_0)/\mathfrak{m}_0\mathscr{R}(\mathfrak{q}_0))$. Es gilt dann nach Satz 3.16

$$e_1(\mathfrak{q}_0, H^i_{R_+}(M)_n) = e_0(\mathfrak{q}_0, H^i_{R_+}(M)_n)\bar{n_0} - l_{R_0}(H^i_{R_+}(M)_n/\mathfrak{q}_0^{\bar{n_0}+1}H^i_{R_+}(M)_n)$$

$$-l_{R_0}(\mathfrak{q}_0^{\bar{n_0}+1}H^i_{R_+}(M)_n \cap \Gamma_{\mathfrak{m}_0}(H^i_{R_+}(M)_n)).$$

Nach Satz 3.24 existiert ein Polynom $Q(X) \in \mathbb{Q}[X]$ mit $\deg(Q(X)) < i$ so, dass gilt

$$e_0(\mathfrak{q}_0, H^i_{R_+}(M)_n) = Q(n).$$

Da $\mathfrak{q}_0$ ein $\mathfrak{m}_0$-primäres Ideal ist, ist auch $\mathfrak{q}_0^{\bar{n_0}+1}$ ein $\mathfrak{m}_0$-primäres Ideal. Wiederum nach Satz 3.24 existiert ein Polynom $P(X) \in \mathbb{Q}[X]$ mit $\deg(P(X)) < i$ so, dass gilt

$$l_{R_0}(H^i_{R_+}(M)_n/\mathfrak{q}_0^{\bar{n_0}+1}H^i_{R_+}(M)_n) = P(n).$$

Weil für $n \ll 0$ gilt $\dim_{R_0}(H^i_{R_+}(M)_n) = 1$, folgt aus Lemma 3.26, dass ein Polynom $L(X) \in \mathbb{Q}[X]$ mit $\deg(L(X)) < i$ existiert so, dass für alle $n \ll 0$ gilt

$$l_{R_0}(\mathfrak{q}_0^{\bar{n_0}+1}H^i_{R_+}(M)_n \cap \Gamma_{\mathfrak{m}_0}(H^i_{R_+}(M)_n)) = L(n).$$

Somit folgt aus obiger Gleichung für alle $n \ll 0$

$$e_1(\mathfrak{q}_0, H^i_{R_+}(M)_n) = Q(n)\bar{n_0} - P(n) - L(n).$$

Sei $E(X) := Q(X)\bar{n_0} - P(X) - L(X) \in \mathbb{Q}[X]$.
Es gilt dann $\deg(E) \leq \max\{\deg(Q), \deg(P), \deg(L)\} < i$, und daraus folgt die Behauptung. □

Bemerkungen 3.28
a) Die Voraussetzung, dass für alle $n \ll 0$ die R_0-Moduln $H^i_{R_+}(M)_n$ eindimensional sind, stellt keine wesentliche Einschränkung dar. Nach Korollar 3.25 ist nämlich entweder diese Voraussetzung erfüllt, oder alle diese Moduln haben eine Dimension kleiner als 1. Ist letzteres der Fall, so hat das Hilbert-Samuel-Polynom $P_{H^i_{R_+}(M),\mathfrak{q}_0}$ einen Grad kleiner als 1, und es gibt deshalb gar keinen ersten Hilbert-Samuel-Koeffizienten.
b) Vermöge einiger Standardkonstruktionen kann man zeigen, dass die hier gezeigten Resultate auch dann richtig bleiben, wenn der Restekörper des Grundringes nicht unendlich ist (vgl. [4] und [3]).

Kapitel 4

Beispiele

In diesem Kapitel möchten wir unsere Resultate durch Beispiele illustrieren und Hilbert-Samuel-Koeffizienten graduierter Komponenten lokaler Kohomologiemoduln explizit berechnen. Dazu müssen wir vorgehend einen passenden Noetherschen homogenen Ring R wählen, dessen Grundring R_0 die Voraussetzungen für die Sätze des letzten Kapitels erfüllt, der also lokal und eindimensional ist. In Paragraph 4.1 werden wir sehen, dass dies der Fall ist, wenn wir für R_0 einen diskreten Bewertungsring wählen. Dazu erinnern wir an die nötigen Grundbegriffe, werden aber kaum auf die Theorie der DVRs eingehen, sondern verweisen dazu auf [8, Kapitel 10 und 11] und [5, Kapitel 8].

Über dem DVR R_0 betrachten wir einen homogenen Ring R, den wir als Quotientenring eines Polynomringes über R_0 erhalten. In Paragraph 4.2 werden wir die Castelnuovo-Mumford-Regularität des assoziierten graduierten Ringes zu einem zum Maximalideal von R_0 primären Ideal sowie die lokalen Kohomologiemoduln – und ihre graduierten Komponenten – eines endlich erzeugten graduierten R-Moduls M berechnen. Der Einfachheit halber wählen wir $M = R$. Nach einer allgemeinen Beschreibung der graduierten Komponenten der Kohomologiemoduln berechnen wir im letzten Paragraphen das Hilbert-Samuel-Polynom der ersten lokalen Kohomologie und die zugehörigen Koeffizienten.

4.1 Diskrete Bewertungsringe

Es gelten weiterhin die Notationen aus 1.1.

Bemerkungen und Definitionen 4.1
a) Für einen Integritätsbereich A definieren wir

$$A^{-1} := \{x^{-1} \in \mathrm{Quot}(A) | x \in A \setminus 0\}.$$

b) Ein **Bewertungsring** ist ein Integritätsbereich A mit $A \cup A^{-1} = \mathrm{Quot}(A)$.
c) Seien A ein Bewertungsring und W_A die Menge aller monogener, in $\mathrm{Quot}(A)$ enthaltener und von 0 verschiedener A-Moduln, das heisst

$$W_A := \{xA | x \in \mathrm{Quot}(A) \setminus 0\}.$$

Wir definieren auf W_A eine Multiplikation durch

$$W_A^2 \longrightarrow W_A, (xA, yA) \longmapsto xA \cdot yA := xyA.$$

Wie man leicht sieht wird W_A dadurch, zusammen mit der Inklusion $\supseteq$, zu einer geordneten Abelschen Gruppe.
d) Im folgenden fassen wir $\mathbb{Z}$ als geordnete Abelsche Gruppe bezüglich der Addition und der Standardordnung auf.
e) Ein **diskreter Bewertungsring** (oder kurz **DVR**) ist ein Bewertungsring A so, dass W_A und $\mathbb{Z}$ als geordnete Abelsche Gruppen isomorph sind.

Satz 4.2
Sei A ein Ring. A ist genau dann ein diskreter Bewertungsring, wenn A ein Noetherscher lokaler Ring positiver Dimension ist, dessen Maximalideal ein Hauptideal ist.

Beweis. [8, Theorem 11.2]. □

Korollar 4.3
Ein diskreter Bewertungsring ist ein eindimensionaler, Noetherscher lokaler Ring.

Beweis. Sei A ein DVR. Nach Satz 4.2 ist A Noethersch, lokal und von positiver Dimension. Sei $\mathfrak{m}$ das Maximalideal von A. Die Definition der Dimension ergibt zusammen mit dem Krullschen Hauptidealsatz

$$0 < \dim(A) = \mathrm{ht}(\mathfrak{m}) \leq 1.$$

□

Bemerkungen 4.4
Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein diskreter Bewertungsring.
a) Nach Satz 4.2 existiert ein $\pi \in A$ so, dass $\mathfrak{m} = \pi A$.
b) Für ein Ideal $\mathfrak{q} \subseteq A$ sind offenbar äquivalent:

(i) $0 \neq \mathfrak{q} \neq A$.
(ii) $\mathfrak{q}$ ist $\mathfrak{m}$-primär.
(iii) Es gibt ein $t \in \mathbb{N}$ mit $\mathfrak{q} = \pi^t A$.

Nach obigen Aussagen eignen sich also diskrete Bewertungsringe als Grundringe homogener Ringe in der uns interessierenden Situation.

4.2 Die lokalen Kohomologiemoduln und ihre graduierten Komponenten

Wir berechnen nun die Regularität des assoziierten graduierten Ringes zu einem nichttrivialen Ideal eines diskreten Bewertungsringes.

Satz 4.5
a) Seien A ein Noetherscher Ring, T eine Unbestimmte und der Polynomring $A[T]$ versehen mit der Standardgraduierung. Dann gilt

$$\mathrm{reg}(A[T]) = 0.$$

b) Seien $(A, \pi A)$ ein diskreter Bewertungsring und $\mathfrak{q} \subseteq A$ ein Ideal mit $0 \neq \mathfrak{q} \neq A$. Dann gilt

$$\mathrm{reg}(\mathrm{Gr}(\mathfrak{q})) = 0.$$

Beweis. a) [4, Exercise 15.2.11].
b) Nach Bemerkung 4.4 b) finden wir ein $t \in \mathbb{N}$ mit $\mathfrak{q} = \pi^t A$. Weiter gilt nach Definition

$$\mathrm{Gr}(\pi^t R_0) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} (\pi^{nt} R_0 / \pi^{(n+1)t} R_0).$$

Seien

$$x := \pi^t + \pi^{2t} R_0 \in \pi^t R_0 / \pi^{2t} R_0$$

und

$$x^* := \pi^t + \pi^{2t} R_0 \in \mathrm{Gr}(\pi^t R_0)_1.$$

Dann gilt offenbar

$$\mathrm{Gr}(\pi^t R_0) \cong (R_0 / \pi^t R_0)[x^*].$$

Sei T eine Unbestimmte. Wir betrachten den surjektiven kanonischen Morphismus von R_0-Algebren

$$\Phi : (R_0/\pi^t R_0)[T] \longrightarrow (R_0/\pi^t R_0)[x^*]$$

mit $T \longmapsto x^*$. Sei $F \in \mathrm{Ker}(\Phi)$. Dann gibt es ein $s \in \mathbb{N}_0$ und $r_0, ..., r_s \in R_0$ so, dass $F = \sum_{i=0}^{s} (r_i + \pi^t R_0) T^i$. Daraus ergibt sich

$$0 = \Phi\left(\sum_{i=0}^{s} (r_i + \pi^t R_0) T^i\right) = \sum_{i=0}^{s} (r_i + \pi^t R_0)(x^*)^i$$

$$= \sum_{i=0}^{s} (r_i + \pi^t R_0)(\pi^t + \pi^{2t} R_0)^i = \sum_{i=0}^{s} (r_i \pi^{it} + \pi^{(i+1)} R_0).$$

Für jedes $i \in \{0, ..., s\}$ gilt also $r_i \pi^{it} \in \pi^{(i+1)t} R_0$, das heisst $r_i \in \pi^t R_0$, und folglich gilt $F = 0$. Also ist Φ injektiv, und deshalb besteht ein Isomorphismus von R_0-Algebren

$$\mathrm{Gr}(\pi^t R_0) \cong (R_0/\pi^t R_0)[T].$$

Aus Aussage a) folgt nun die Behauptung. $\square$

Um die lokalen Kohomologiemoduln beschreiben zu können, müssen wir Moduln von inversen Polynomen einführen; man vergleiche dazu auch [4, Example 12.4.1].

Bemerkung und Definition 4.6
a) Seien A_0 ein Ring, $n \in \mathbb{N}$ und $A := A_0[X_1, ..., X_n]$ der Polynomring in den Unbestimmten $X_1, ..., X_n$ über A_0, versehen mit der Standardgraduierung. Weiter seien $\mathcal{B}$ die Familie $(X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n})_{(i_1,...,i_n)\in(-\mathbb{N})^n}$ in $A_{X_1\cdots X_n}$ und F der freie R_0-Modul mit Basis $\mathcal{B}$.
b) Für $(i_1, ..., i_n) \in (-\mathbb{N})^n$ und $t \in \{1, ..., n\}$ sei

$$X_t(X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n}) := \begin{cases} X_1^{i_1} \cdots X_{t-1}^{i_{t-1}} X_t^{i_t+1} X_{t+1}^{i_{t+1}} \cdots X_n^{i_n}, & \text{falls } i_t < -1 \\ 0, & \text{falls } i_t = -1. \end{cases}$$

Leicht sieht man, dass dadurch eine A-Modulstruktur auf F definiert wird.
c) Für $(i_1, ..., i_n) \in (-\mathbb{N})^n$ und $r \in R_0$ sei

$$\deg(rX_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n}) := i_1 + \cdots + i_n.$$

Wiederum sieht man leicht, dass dadurch eine Graduierung auf dem A-Modul F definiert wird.
d) $A_0[X_1^-, ..., X_n^-]$ bezeichnet den A-Modul F, versehen mit der in c) definierten Graduierung, und heisst der **Modul der inversen Polynome in** $X_1, ..., X_n$ **über** R_0.

Wir führen für den Rest dieses Kapitels die folgenden Bezeichnungen ein. Seien

- $(R_0, \pi R_0)$ ein diskreter Bewertungsring,
- $S := R_0[X, Y]$ der Polynomring in zwei Unbestimmten über R_0, versehen mit der Standardgraduierung,
- $l \in \mathbb{N}$ und $f \in S_l$ ein homogenes Polynom vom Grad l und
- $R := S/fS$ versehen mit der Quotientengraduierung.

Bemerkung 4.7
$R = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0} R_n$ ist ein Noetherscher homogener Ring mit eindimensionalem lokalem Grundring $(R_0, \pi R_0)$.

Lemma 4.8
In ${}^*\mathscr{C}(S)$ *besteht ein Isomorphismus*

$$H^2_{S_+}(S) \cong R_0[X^-, Y^-].$$

Beweis. [4, Example 12.4.1]. $\square$

Lemma 4.9
Für $i \in \mathbb{N}_0 \setminus \{1, 2\}$ gilt $H^i_{R_+}(R) = 0$.

Beweis. Mit R_0 ist auch S integer, und deshalb gilt $f \in \mathrm{NZD}(S)$. Offenbar gelten

$$\mathrm{ara}(S_+) = 2 \text{ und } \mathrm{grade}_S(S_+) = 2.$$

Somit folgt $\mathrm{grade}_R(S_+) = 1$. Für alle $i \in \mathbb{N}_0$ gilt wegen der graduierten Grundringunabhängigkeit der lokalen Kohomologie in ${}^*\mathscr{C}(S)$:

$$H^i_{R_+}(R) \restriction_S \cong H^i_{S_+}(R \restriction_S).$$

Wegen $\mathrm{ara}(S_+) = 2$ folgt aus Satz 1.25 a), dass für $i > 2$ gilt

$$H^i_{R_+}(R) \cong H^i_{S_+}(R) = 0.$$

Wegen $\mathrm{grade}_R(S_+) = 1$ folgt aus Satz 1.25 b), dass

$$H^0_{R_+}(R) \cong H^0_{S_+}(R) = 0.$$

□

Lemma 4.10
In ${}^*\mathscr{C}(S)$ besteht die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow H^1_{R_+}(R) \longrightarrow H^2_{S_+}(S)(-l) \xrightarrow{f\cdot} H^2_{S_+}(S) \longrightarrow H^2_{R_+}(R) \longrightarrow 0.$$

Beweis. Wegen $f \in \mathrm{NZD}(S)$ besteht in ${}^*\mathscr{C}(S)$ die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow S(-l) \xrightarrow{f\cdot} S \longrightarrow R \longrightarrow 0.$$

Die zugehörige lange exakte Kohomologiesequenz wird vermöge der graduierten Grundringunabhängigkeit und Lemma 4.9 zur gewünschten Sequenz. □

Satz 4.11
In ${}^*\mathscr{C}(S)$ bestehen folgende Isomorphismen:

$$H^1_{R_+}(R) \cong \mathrm{Ker}\left(R_0[X^-, Y^-](-l) \xrightarrow{f\cdot} R_0[X^-, Y^-]\right),$$

$$H^2_{R_+}(R) \cong \mathrm{Coker}\left(R_0[X^-, Y^-](-l) \xrightarrow{f\cdot} R_0[X^-, Y^-]\right).$$

Beweis. Dies folgt vermöge der Isomorphismen von Lemma 4.8 unmittelbar aus Lemma 4.10 zusammen mit der Tatsache, dass die lokale Kohomologie mit dem Linksverschiebungsfunktor $\bullet(-l)$ vertauscht. □

Korollar 4.12
Für alle $n \in \mathbb{Z}$ bestehen in $\mathscr{C}(R_0)$ folgende Isomorphismen:

$$H^1_{R_+}(R)_n \cong \operatorname{Ker}\left(\bigoplus_{\substack{\nu,\mu \in -\mathbb{N} \\ \nu+\mu=n-l}} R_0 X^\nu Y^\mu \xrightarrow{f\cdot} \bigoplus_{\substack{\nu,\mu \in -\mathbb{N} \\ \nu+\mu=n}} R_0 X^\nu Y^\mu \right),$$

$$H^2_{R_+}(R)_n \cong \operatorname{Coker}\left(\bigoplus_{\substack{\nu,\mu \in -\mathbb{N} \\ \nu+\mu=n-l}} R_0 X^\nu Y^\mu \xrightarrow{f\cdot} \bigoplus_{\substack{\nu,\mu \in -\mathbb{N} \\ \nu+\mu=n}} R_0 X^\nu Y^\mu \right).$$

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus Satz 4.11 und aus der Definition von $R_0[X^-, Y^-]$. □

Korollar 4.13
a) Für $n \geq l$ gilt $H^1_{R_+}(R)_n = 0$.
b) Für $0 \leq n \leq l-1$ gilt $H^1_{R_+}(R)_n = R_0[X^-, Y^-]_{n-l}$.
c) Für $n \geq -1$ gilt $H^2_{R_+}(R)_n = 0$.

Beweis. Alle Aussagen folgen unmittelbar aus Korollar 4.12. □

4.3 Hilbert-Samuel-Polynome des ersten lokalen Kohomologiemoduls

Wir wissen bereits (vgl. Theorem 3.27), dass die Hilbert-Samuel-Koeffizienten der graduierten Komponenten des ersten lokalen Kohomologiemoduls für genügend kleine Grade konstant werden, das heisst einen gemeinsamen Wert annehmen. Unser Ziel ist nun, ihre Werte in der in den vorangehenden Paragraphen beschriebenen Situation zu berechnen.

Als erstes zeigen wir, dass die Komponenten von $H^1_{R_+}(R)$ frei von endlichem Rang sind. Danach werden wir ihre Hilbert-Samuel-Koeffizienten durch diese Ränge ausdrücken und dadurch ihre Berechnung möglich machen.

Satz 4.14
Sei A ein diskreter Bewertungsring. Ein endlich erzeugter A-Modul ist genau dann frei, wenn er torsionsfrei ist.

Beweis. [8, Theorem 7.10 und Exercise 10.2]. □

Satz 4.15
Für alle $n \in \mathbb{Z}$ ist $H^1_{R_+}(R)_n$ ein freier R_0-Modul von endlichem Rang, und es gilt

$$\operatorname{rk}(H^1_{R_+}(R)_n) = \begin{cases} 0 & falls \quad l \leq n \\ l-n-1 & falls \quad 0 \leq n \leq l-1 \\ l & falls \quad n \leq -1 \end{cases}$$

Beweis. a) Für $n \geq 0$ folgen die Aussagen unmittelbar aus Korollar 4.13. Sei also $n \in -\mathbb{N}$. Nach Satz 4.11 ist $H^1_{R_+}(R)_n$ ein endlich erzeugter R_0-Untermodul des freien R_0-Moduls $R_0[X^-, Y^-]$. Weil R_0 ein DVR und somit integer ist, folgt aus Satz 4.14, das $H^1_{R_+}(R)_n$ frei von endlichem Rang ist.
b) Sei $K_0 := \mathrm{Quot}(R_0)$. Nach Lemma 4.10 besteht in $\mathscr{C}(R_0)$ folgende exakte Sequenz:

$$0 \longrightarrow H^1_{R_+}(R)_n \longrightarrow H^2_{S_+}(S)_{n-l} \longrightarrow H^2_{S_+}(S)_n \longrightarrow H^2_{S_+}(S)_n \longrightarrow H^2_{R_+}(R)_n \longrightarrow 0.$$

Die Anwendung des exakten Funktors $K_0 \otimes_{R_0} \bullet$ und die Grundringunabhängigkeit der lokalen Kohomologie liefern folgende exakte Sequenz in $\mathscr{C}(K_0)$:

$$\mathbb{S} : 0 \longrightarrow H^1_{K_0 \otimes_{R_0} R_+}(K_0 \otimes_{R_0} R)_n \longrightarrow H^2_{K_0 \otimes_{R_0} S_+}(K_0 \otimes_{R_0} S)_{n-l}$$

$$\longrightarrow H^2_{K_0 \otimes_{R_0} S_+}(K_0 \otimes_{R_0} S)_n \longrightarrow H^2_{K_0 \otimes_{R_0} R_+}(K_0 \otimes_{R_0} R)_n \longrightarrow 0,$$

und wir können R_0 durch K_0 ersetzen, das heisst oBdA annehmen, R_0 sei ein Körper. Der Rang eines R_0-Moduls ist dann gleich seiner Vektorraumdimension über R_0.
c) Es gilt

$$\dim(S) = \dim(R_0[X, Y]) = 2.$$

Wegen $f \in \mathrm{NZD}(S)$ folgt

$$\dim(R) = \dim(S/fS) = \dim(S) - 1 = 1.$$

Aus dem Verschwindungssatz von Grothendieck folgt damit

$$H^2_{R_+}(R)_n = 0.$$

Deswegen folgt mit der Additivität der Vektorraumdimension $\dim_{R_0}(\bullet)$ aus der Sequenz $\mathbb{S}$, dass gilt

$$\dim_{R_0}(H^1_{R_+}(R)_n) = \dim_{R_0}(H^2_{S_+}(S)_{n-l}) - \dim_{R_0}(H^2_{S_+}(S)_n),$$

nach Lemma 4.8 also

$$\mathrm{rk}(H^1_{R_+}(R)_n) = \dim_{R_0}(H^1_{R_+}(R)_n) = \dim_{R_0}(R_0[X^-, Y^-]_{n-l}) - \dim_{R_0}(R_0[X^-, Y^-]_n).$$

Weil $R_0[X^-, Y^-]_m$ über R_0 die Dimension $\max\{-m + 1, 0\}$ hat, folgt daraus die Behauptung. □

Lemma 4.16
Seien $(A, \mathfrak{m})$ ein Noetherscher lokaler Ring, $\mathfrak{q} \subseteq A$ ein $\mathfrak{m}$-primäres Ideal und F ein freier A-Modul von endlichem Rang. Dann gilt

$$H_{F,\mathfrak{q}} = \mathrm{rk}(F) \cdot H_{A,\mathfrak{q}}.$$

Beweis. Sei $n := \mathrm{rk}(F) \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt $F \cong A^n$ in $\mathscr{C}(A)$, und für alle $m \in \mathbb{N}_0$ folgt

$$H_{F,\mathfrak{q}}(m) = l_A(F/\mathfrak{q}^{m+1}F) = l_A(A^n/\mathfrak{q}^{m+1}A^n) = l_A(A^n) - l_A(\mathfrak{q}^{m+1}A^n)$$

$$= n \cdot l_A(A) - n \cdot l_A(\mathfrak{q}^{m+1}A) = n \cdot l_A(A/\mathfrak{q}^{m+1}A) = n \cdot H_{A,\mathfrak{q}}(m),$$

was die Behauptung impliziert. □

Satz 4.17
Sei $n \in -\mathbb{N}$. *Es bezeichne* H *bzw.* P *die Hilbert-Samuel-Funktion bzw. das Hilbert-Samuel-Polynom von* $H^1_{R_+}(R)_n$ *bezüglich* πR_0.
a) Für alle $m \in \mathbb{N}_0$ *gilt*

$$H(m) = \mathrm{rk}(H^1_{R_+}(R)_n) \cdot (m+1).$$

b) Es gelten

$$P(X) = \mathrm{rk}(H^1_{R_+}(R)_n) \cdot X + \mathrm{rk}(H^1_{R_+}(R)_n),$$

$$\mu(H^1_{R_+}(R)_n, \pi R_0) = 0,$$

$$e_0(\pi R_0, H^1_{R_+}(R)_n) = -e_1(\pi R_0, H^1_{R_+}(R)_n) = \mathrm{rk}(H^1_{R_+}(R)_n).$$

Beweis. a) Dies folgt unmittelbar aus Satz 4.15 und Lemma 4.16, weil

$$l_{R_0}(R_0/\pi^{n+1}R_0) = m + 1.$$

b) Nach a) ist H auf ganz $\mathbb{N}_0$ polynomial, woraus alle Aussagen folgen. □

Satz 4.18
Seien $(R_0, \pi R_0)$ *ein DVR,* $l \in \mathbb{N}$, $f \in R_0[X,Y]_l$ *und* $R := R_0[X,Y]/fR_0[X,Y]$. *Dann gelten für alle* $n \in -\mathbb{N}$

$$e_0(\pi R_0, H^1_{R_+}(R)_n) = l,$$

$$e_1(\pi R_0, H^1_{R_+}(R)_n) = -l.$$

Beweis. Dies folgt sofort aus den Sätzen 4.15 und 4.17. □

Literaturverzeichnis

[1] M. Brodmann. *Algebraische Geometrie.* Birkhäuser, 1989

[2] M. Brodmann, S. Fumasoli, R. Tajarod. *Local cohomology over homogeneous rings with one-dimensional local base ring.* Proceedings of the AMS 131 (2002), 2077–2985

[3] M. Brodmann, F. Rohrer. *Hilbert-Samuel coefficients and postulation numbers of graded components of certain local cohomology modules.* Universität Zürich Preprint Series, 14-2003

[4] M. P. Brodmann, R. Y. Sharp. *Local cohomology.* Cambridge University Press, 1998

[5] R. Brüske, F. Ischebeck, F. Vogel. *Kommutative Algebra.* BI Wissenschaftsverlag, 1989

[6] L. Groppelli. *Zwei Zugänge zur Theorie der Hilbert-Kirby-Polynome von artinschen Moduln über noetherschen lokalen Ringen.* Diplomarbeit Universität Zürich, 2001

[7] W. Bruns, J. Herzog. *Cohen-Macaulay rings.* Cambridge University Press, 1993

[8] H. Matsumura. *Commutative ring theory.* Cambridge University Press, 1986